अंकगणित

उपपत्ति व उदाहरणें ह्यांसहित.

भाग दुसरा.

हें पुस्तक,

केरो लक्ष्मण छत्रे,

डेक्कन कॉलेजांतील गणितशास्त्राचे माजी प्रोफेसर

ह्यांनीं केलें. तें,

नीलकंठ वि० छत्रे बी. ए., एल्. सी. ई.,

डेप्युटी एज्युकेशनल इन्स्पेक्टर-जिल्हा ठाणें

ह्यांनीं

तपासून, विषयाच्या प्रतिपादनपद्धतींत सुधारणा करून, त्याला पुष्कळ प्रकारचीं उदाहरणें जोडून, वाढविलें.

सुधारलेली पांचवी आवृत्ति.—२५,००० प्रती.

पुणें येथें

आर्यभूषण छापखान्यांत छापिलें.

सन १९०० इ०.

किंमत ६ आणे.

प्रस्तावना.

सुधारलेली आवृत्ति ४ थी.

ही **चौथी सुधारलेली** आवृत्ति तयार करितांना ती० रा० रा० **मोरो बल्लाळ धारप** ह्यांनीं सुधारलेल्या तिसऱ्या आवृत्तीचा पूर्ण उपयोग केला आहे.

मुलांस विषय सहज कळावा ह्मणून उपपादन अगदीं सोप्या भाषेंत केलें आहे. कित्येक ठिकाणीं रेघांचा उपयोग करून अपूर्णांकांची वगैरे समजूत करून दिली आहे. उदाहरणसंग्रह वाढविला आहे, व उदाहरणांची जुळणी कठिणपणाचे क्रमानें केली आहे. प्रत्येक विषयावरील उदाहरणसंग्रहांतील पहिलीं १५।२० उदाहरणें केलीं ह्मणजे तो विषय समजेल. कठिण उदाहरणें पुढें घातलीं आहेत तीं उजळणीचे वेळीं करावीं.

विषयाची जुळणी अनुक्रमणिकेवरून कळेल.

उदाहरणांचीं उत्तरें काढण्याच्या कामीं **नाशिक** जिल्ह्यांतील शिक्षकांकडून चांगली मदत मिळाली. दुसऱ्या जिल्ह्यांतील शिक्षकांनींही बऱ्याच उपयुक्त अशा सूचना केल्या. ह्याबद्दल त्यांचे मी आभार मानितों.

मेहेरबान **चाटफील्डसाहेब** बहादूर, डायरेक्टर आफ् पब्लिक-इन्स्ट्रक्शन, मुंबई, ह्यांनीं " अंकगणित भाग १ ला व २ रा " ह्या आमच्या वडिलांच्या कृतींची मालकी आमचेकडे दिली ह्याबद्दल मी त्यांचा फार फार आभारी आहें.

शिक्षकांनीं शिकविण्यापूर्वीं ह्या पुस्तकावरून विषय वाचून पहावा. मुलांस समजतील तींच कलमें पहिल्यानें त्यांस सांगावीं. उपपत्ति निरनिराळ्या तऱ्हेनें दिली आहे. जिचा उपयोग होईल तीच तऱ्हा उपयोगांत आणावी. बहुतेक दुर्बोधता काढून टाकिली आहे. तथापि जे दोष कोणास आढळतील व ज्या

सुधारणा करणें योग्य वाटेल त्या त्यांनीं कृपा करून आमचेकडे लिहून पाठवाव्या, त्यांचा आभारपूर्वक स्वीकार करून पुढील आवृत्तीचे वेळीं त्यांचा विचार अवश्य करूं. नाशिक, ता. ८।११।९६.

सुधारलेली आवृत्ति ५ वी–भाग २.

ह्या आवृत्तींत बारिकसारिक सुधारणा बऱ्याच केल्या आहेत. उदाहरणांतही थोडाबहुत फेरफार केला आहे. पण एकंदरीनें फार बदल केलेला नाहीं. पूर्वींच्या आवृत्तीचे मात्र दोन भाग केले आहेत. ह्या २ ऱ्या भागांत **सरळव्याज** अखेर गणित विषय दिला आहे. ३ ऱ्या भागांत पुढील उरलेला सर्व गणित भाग म्हणजे **चक्रवाढव्याज** वगैरे प्रकरणें आलीं आहेत. अनुक्रमणिकेवरून ह्या भागांत येणाऱ्या विषयांचा बोध होईल. मराठी ४ थी यत्ता शिकणारांनीं हा २ रा भाग घेतला ह्मणजे पुरे आहे. ३ रा भाग यत्ता ५ व ६ व कालेजें ह्यांत उपयोगी पडणारा आहे.

ठाणें,
ता. १।३।१९०० } नी० वि० छत्रे.

अनुक्रमणिका.



अंकगणित.



भाग २ रा.

व्यवहारी अपूर्णांक.

१. एका पेरूचे चार सारखे भाग केले; त्यांपैकीं एक भाग घेतला तर त्यास आपण पाव ह्मणतों, व तो ·।· असा लिहितों. त्या एका भागाचे ह्मणजे फोडीचे चार भाग केले. त्या चार भागांपैकीं एक भाग लिहिणें झाल्यास तो ०― असा लिहितों. हें चतुर्थांशपद्धतीचें अथवा रेघांचे लिहिणें जेथें चार चार भाग केलेले असतात, तेथें मात्र उपयोगीं पडतें. रेघांचे अपूर्णांकांविषयीं अं० भा० १ क० १२९ मध्यें पूर्वींच विचार केला आहे.

२. एका पेरूचे १० भाग केले, आणि त्यांपैकीं १ घेतला. अगर त्या एकाचे पुनः १० भाग केले, व त्यांपैकीं ३ भाग घेतले; तर ते दशांशपद्धतीनें अनुक्रमें ·१ व ·०३ असे लिहितात. दशांशपद्धतीनें लिहिण्याविषयीं विचार पुढें ह्याच भागांत केला आहे. इतकें मात्र येथें सांगणें जरूर आहे कीं, जसे रेघांचे अपूर्णांकांत चार चार भाग करावे लागतात, तसे दशांशपद्धतींत दहा दहा भाग करावे लागतात.

३. ह्या वरील विचारावरून असें कळून येईल कीं, रेघांचा अगर दशांशांचा उपयोग जेथें १२ भाग किंवा १९ भाग केले आहेत, तेथें होत नाहीं. व्यवहारांत तर एका वस्तूचे पाहिजे तितके भाग करावे लागतात. तेव्हां सर्व प्रकारच्या व्यवहारांत उपयोगीं पडणाऱ्या अशा व्यवहारी अपूर्णांकांविषयीं विचार करणें अवश्य आहे.

४. आमचेजवळ १२ पेरू आहेत. त्यांपैकीं ४ पेरू पहिल्या

नंबरच्या मुलास दिले. ३ पेरू दुसऱ्या नंबरच्यास दिले. २ तिसऱ्या नंबरच्या मुलास दिले व १ चवथ्या नंबरच्या मुलास दिला. बाकी राहिले दोन पेरू. त्यांपैकीं एकाच्या सारख्या ३ फांकी केल्या. त्या पांचव्या, सहाव्या व सातव्या मुलांस दिल्या. ११ पेरूंची वाट लागली. शिल्लक एक पेरू उरला. त्याची एक बारीक फांक काढिली आणि ती दिली आठव्या नंबराला. प्रत्येकाला काय काय मिळालें तें त्यानें पाटीवर लिहून दाखवावें असें सांगितलें, तर—

१ ला	मुलगा	लिहील	....	४ पेरू.
२ रा	,,	,,	....	३ ,,
३ रा	,,	,,	....	२ ,,
४ था	,,	,,	....	१ ,,

पण नंबर ५, ६, ७, ८ च्या मुलांस सगळाला ह्मणजे पूर्ण पेरू मिळाला नाहीं. त्यांस फांक ह्मणजे पेरूचा भाग किंवा अपूर्ण पेरू मिळाला आहे. त्यांनीं तें कसें लिहून दाखवावें? हें व्यवहारांत लिहिण्याची चाल अशी आहे कीं, एक आडवी रेघ — अशी काढून तिचे खालीं दिलेल्या वस्तूचे केलेल्या भागांची संख्या लिहावी आणि वरतीं घेतलेल्या भागांची संख्या लिहावी. तर मग ह्याप्रमाणें लिहिलें तर—

५ वा, ६ वा, व ७ वा मुलगा लिहील ...... $\frac{1}{3}$ पेरू, पण आठवा मुलगा अडला. कारण त्याला जरी एक बारीकशी फांक दिली आहे, तरी त्या पेरूचे किती समान भाग पाडून त्यांतली ती एक घेतली आहे, हें समजत नाहीं. ह्मणून आठव्या नंबरच्या मुलास ज्या पेरूची फांक काढून दिली तो पेरू घेऊन त्याच्या आणखी फांकी केल्या. प्रत्येक फांक आठव्या नंबरच्या मुलाला दिलेल्या फांकीएवढी, अशा त्याच्या आठ फांकी झाल्या तसल्या फांकी नवव्या नंबरच्यास दिल्या ४, दहाव्या नंबरास दिल्या २, बाकी राहिलेली एक फांक पुनः आठवे नंबरच्या मुलास दिली. आणि सांगितलें आतां लिहा पाहूं तर—

८ वा नंबरचा मुलगा लिहील...... $\frac{३}{१०}$ पेरू.
९ वा „ „ „ ...... $\frac{४}{१०}$ „
१० वा „ „ „ ...... $\frac{२}{१०}$ „

येथें ४ पेरू, ३ पेरू, २ पेरू, व १ पेरू अथवा ४, ३, २ व १ ह्या पूर्णांच्या संख्येला **पूर्णांक** ह्मणतात. व $\frac{४}{१०}$ पेरू, $\frac{३}{१०}$ पेरू, $\frac{१}{१०}$ पेरू अथवा $\frac{४}{१०}$, $\frac{३}{१०}$ व $\frac{१}{१०}$ ह्या अपूर्णांच्या संख्येला **व्यवहारी अपूर्णांक** ह्मणतात.

५. अपूर्णांक हे भाज्य ÷ भाजक ह्या भागाकार दाखविण्याच्या पद्धतीनें लिहितात, हें वरतीं सांगितलेंच आहे.

अपूर्णांकांत भाज्यास **अंश** व भाजकाला **छेद** ह्मणतात हें लक्षांत ठेवावें, ह्मणजे अंश ÷ छेद* ह्या भागाकाराला अपूर्णांक ह्मणतात असें झालें.

अंश व छेद ह्यांस अपूर्णांकाचीं **पदें** ह्मणतात.

अंशछेदांच्या जोड्या चार प्रकारच्या होतात, जशाः—

$\frac{\text{परिमाणसंख्या}}{\text{परिमाणसंख्या}}$	उदाहरण	$\frac{\text{६ रुपये}}{\text{२ रुपये}}$ *	... (१)
$\frac{\text{परिमाणसंख्या}}{\text{भावसंख्या}}$	उ०	$\frac{\text{६ रुपये}}{\text{२}}$	... (२)
$\frac{\text{भावसंख्या}}{\text{भावसंख्या}}$	उ०	$\frac{६}{२}$	... (३)
$\frac{\text{भावसंख्या}}{\text{परिमाणसंख्या}}$	उ०	$\frac{६}{\text{२ रुपये}}$	... (४)

वरील (१), (२), (३) ह्या प्रकारांत उत्तर संभवनीय आहे, पण (४) ह्या प्रकारांत उत्तर मुळींच संभवत नाहीं. ह्मणून फक्त तीन प्रकारच्या वरतीं दाखविलेल्या भाज्यभाजकांच्या जोड्यांनीं अपूर्णांक दाखविले जातील हें स्पष्ट आहे.

---

* अंश ÷ छेद, $\frac{\text{६ रु.}}{\text{२ रु.}}$, $\frac{\text{६ रु.}}{\text{२}}$, $\frac{६}{२}$ व $\frac{६}{\text{२ रुपये}}$ हे अपूर्णांक अनुक्रमें अंश भागिले छेद, ६ रुपये भागिले २ रुपये, ६ रुपये भागिले २, ६ भागिले २ व ६ भागिले २ रुपये असे वाचितात.

६. $\frac{६}{८}$ रुपये, ह्या अपूर्णांकाची किंमत काय होते व तो कसा वाचावा हें आतां आपण पाहूं. कलम ४ मध्यें ठरविल्याप्रमाणें अपूर्णांकाचे मांडणीवरून ह्या अपूर्णांकाचा अर्थ असा होतो कीं, १ रुपयाचे ८ भाग करून तसले ६ भाग घेतले. १ रुपयाच्या चवल्या ८, ह्मणून १ चवली ह्मणजे १ रुपयाचा ८ वा भाग झाला. आणि असले ६ भाग घेतले आहेत, तेव्हां ६ चवल्या ह्मणजे १२ आणे घेतले आहेत असें झालें. भाग ह्मणजे अंश. तेव्हां ८ वा भाग ह्मणजे आठवा अंश अगर अष्टमांश (अष्टम + अंश) आणि ६ आठवे भाग ह्मणजे ६ अष्टमांश झाले. ह्मणून $\frac{६}{८}$ रुपये ह्या अपूर्णांकाची किंमत १२ आणे झाली व तो अपूर्णांक **६ अष्टमांश रुपये** असा वाचला पाहिजे. ही अपूर्णांकाची पहिल्या प्रकारची वाचणी लक्षांत धरावी.

आतां पुनः ६ रुपयांच्या चवल्या केल्या. त्या ६ × ८ = ४८ झाल्या. त्यांच्या ८ सारख्या राशी केल्या. प्रत्येक रास सहा सहा चवल्यांची झाली. ह्या ८ राशींपैकीं १ रास घेतली. तींत ६ चवल्या आल्या. ह्मणून त्यांची किंमत १२ आणे झाली. तेव्हां $\frac{६}{८}$ रुपये हा अपूर्णांक ६ रुपयांचा आठवा भाग अथवा **६ रुपयांचा अष्टमांश** असा वाचतां येईल असें झालें. ही दुसऱ्या प्रकारची वाचणीही ध्यानांत ठेविली पाहिजे.

पहिल्या प्रकारच्या वाचणींत चवल्यांची ह्मणजे अपूर्णांकाचे भागांची अगर अंशांची संख्या ६ घेतली हें दाखविलें. दुसऱ्या प्रकारच्या वाचणींत, ६ ही जी रुपयांची संख्या तिचा भाजकाइतका हिस्सा अगर ८ वा भाग अगर ८ अंश घेतला हें दाखविलें. हीच दोन प्रकारची वाचणी कलम ५ मध्यें दाखविलेल्या २ ऱ्या व ३ ऱ्या प्रकारच्या अपूर्णांकांस लागू पडते, ह्मणून तसला प्रत्येक अपूर्णांक हा अंशांची संख्या दाखवितो व संख्येचा अंशही दाखवितो असें होतें.

अपूर्णांकाच्या वरील दोन प्रकारच्या वाचणीवरून अपूर्णांकाचें लक्षण देतां येतें, तें असें:—भाज्यांतील प्रत्येक एकंचा छेदाइतक्यावा एकेक अंश मिळून; अथवा भाज्यांतील एकंचा छे-

दाइतक्यावा भाग, अंशसंख्ये इतका बेळ घेऊन जी संख्या बनते तिला अथवा त्या भाज्याच्या त्या छेदाइतक्याव्या एका अंशाला अपूर्णांक ह्मणतात.

७. अंशछेदाच्या चार जोड्यांपैकीं तीन प्रकारच्या जोड्या मात्र अपूर्णांक दाखविण्याच्या उपयोगी आहेत असें पूर्वी (क. ५) दाखविलेंच आहे. त्या तिन्हींपैकीं प्रकार २ व प्रकार ३ ह्मणजे $\frac{६}{२}$ रु० व $\frac{६}{२}$ अशा प्रकारच्या अपूर्णांकांची वाचणी व अर्थ हीं आतांच वरतीं सांगितलीं आहेत. आतां आपण

$$\frac{\text{परिमाणसंख्या}}{\text{परिमाणसंख्या}} \quad \text{उ०} \quad \frac{\text{६ रु०}}{\text{३ रु०}}$$

असल्या अपूर्णांकाबद्दल विचार करूं.

अंकगणित भाग १ क० १६६ प्रमाणें $\frac{\text{६ रुपये}}{\text{३ रुपये}} = २$ ह्मणजे ६ रुपये हा राशि ३ रुपये ह्या मापानें मोजला तर २ हा अंक मापांची संख्या दाखवितो, ह्मणजे ६ रुपये हे ३ रुपयांच्या कितीपट मोठे आहेत, हें किंवा $\frac{\text{३ रुपये}}{\text{६ रुपये}}$ ह्यांत ३ रुपये ६ रुपयांचा कितवा अंश आहे, हें ह्या अपूर्णांकानें समजतें. एका संख्येपेक्षां दुसरी संख्या कितीपट मोठी अगर लहान आहे हें दाखविणाऱ्या संख्यांस त्या दोन संख्यांचें गुणोत्तर ह्मणतात. तेव्हां $\frac{\text{६ रुपये}}{\text{३ रुपये}}$ अगर $\frac{\text{३ रुपये}}{\text{६ रुपये}}$ व $\frac{६}{३}$ असले अपूर्णांक गुणोत्तरें दाखवितात व हीं गुणोत्तरें अंश भागिले छेद अशीं लिहितात ह्मणून असल्या भाज्यभाजकांचे जोड्यांस अपूर्णांक ह्मणतां येतें.

८. अपूर्णांकाच्या वाचणीच्या पहिल्या तऱ्हेंत **अंश** शब्दानें अपूर्ण परिमाण ($\frac{१}{८}$ रु०) दाखविलें जातें. दुसऱ्या तऱ्हेच्या वाचणींत अंश शब्दानें संख्येचा १ भाग (ह्म० भागाकार) दाखविला जातो, आणि अपूर्णांकाचीं पदें सांगण्यांत अंश शब्दानें भाज्य (ओळीवरचा राशि) दर्शविला जातो. हे **अंश** शब्दाचे निरनिराळे अर्थ लक्षांत ठेविले पाहिजेत.

९. व्युत्क्रम-अपूर्णांकाच्या पदांची ह्मणजे अंशछेदांची अदलाबदल केल्यानें जी संख्या होते तिला त्या अपूर्णांकाचा

व्युत्क्रम ह्मणतात. जसाः—३/७ चा व्युत्क्रम ७/३ आहे, १/७ चा व्युत्क्रम ७/१ आहे किंवा ७ आहे इ०.

१०. पूर्ण संख्येला १ ह्या संख्येनें भागिलें ह्मणजे तिचे किमतींत बदल न होतां तिला अपूर्णांकाचें रूप येतें. जसें:–७/१=७, ८/१=८, १/१=१ इ०.

हें रूप त्या त्या संख्यांचा १ ला भाग दाखवितें.

११. अपूर्णांकाचा छेद हा एकंचे किती भाग केले हें दाखवितो व अंश तसले किती भाग घेतले हें दाखवितो, ह्मणून अपूर्णांकांचे अंश सारखे असल्यास छेद त्यांचा महत्वदर्शक होतो व छेद सारखे असल्यास अंश हा अपूर्णांकांचें महत्व दाखवितो.

१२. अपूर्णांकाचे प्रकार ६ कल्पितात ते असे.—**सम, विषम; भागानुबंध पूर्णांक; भागजाति, प्रभागजाति व मिश्र.**

ज्या अपूर्णांकाचा अंश छेदापेक्षां लहान असतो, त्याला **सम** (वास्तविक) अपूर्णांक ह्मणतात. उ० २/५, ३/८, ७/११ इ०.

ज्या अपूर्णांकाचा अंश छेदापेक्षां लहान नसतो, त्याला **विषम** (दिखाऊ) अपूर्णांक ह्मणतात. उ० ३/२, ५/२, ६/५, ४/४ इ०.

पूर्णांक व अपूर्णांक हे दोन्ही जींत आहेत अशा संख्येला **भागानुबंध पूर्णांक** हें नांव देतात. उ० २ ३/४, ४ ५/८ रु० किंवा १ रुपयाचे ४ ५/८, इ०.

ज्या अपूर्णांकाचा एकं (परिमाण) पूर्णांक असतो, त्याला **भागजाति** (ह्म० पूर्णांचे भाग ह्या जातीचा) अपूर्णांक ह्मणतात. उ० २/५, ३/३, ७/४ इ० अपूर्णांकांचे अर्थ १ चे २/५, १ चे ३/३, १ चे ७/४ इ० होतात, ह्मणून हे भागजाति अपूर्णांक होत.

ज्या अपूर्णांकाचा एकं अपूर्णांक (ह्म० भाग) असतो, त्याला **प्रभागजाति** (भागांचे भाग ह्या जातीचा) अपूर्णांक ह्मणतात, ह्मणजे अपूर्णांकाचा अपूर्णांक ह्मणतातः

उ० २/३ चे ४/५ | १ रु च्या ७/८ चे २/३ इ०

ज्या अपूर्णांकाचा अंश, छेद, अगर हे दोन्ही अपूर्णांक असतात त्याला मिश्र अपूर्णांक ह्मणतात. किंवा **प्रमितिभागजाति** (मोजदातींचा भागजाति) असें ह्मणतात.

उ० $\frac{\frac{२}{३}}{७}$, $\frac{४}{\frac{५}{६}}$, $\frac{\frac{२}{३}}{\frac{४}{५}}$, $\frac{२\frac{२}{३}}{४\frac{५}{६}}$, $\frac{\frac{४}{५}-\frac{५}{७}}{२\frac{३}{४}+\frac{७}{९}}$, इ०

पुढच्या उदाहरणांत रेघांचे अपूर्णांक व विविध पूर्णांक हे व्यवहारी अपूर्णांकांत मांडून दाखविले आहेत, ते तपासून पहा.

·।· $= \frac{१}{४}$; ·।।· $= \frac{२}{४}$; ०— $= \frac{१}{१६}$; ०= $= \frac{२}{१६}$

०।· $= \frac{१}{६४}$; ०।।।· $= \frac{३}{६४}$; ०ऽऽ१ $= \frac{१\text{ शेर}}{७२}$; ०ऽ।४ $= \frac{२२\text{ शेर}}{७२}$,

४।।।=। $= ४ + \frac{३}{४} + \frac{२}{१६} + \frac{१}{६४}$.

किंवा २ रु० ३ आ० ४ पै $= २\text{ रु} + \frac{३\text{ रु.}}{१६} + \frac{४\text{ रु.}}{१९२}$

,, ,, ,, $= \left(२ + \frac{३}{१६} + \frac{४}{१९२}\right)$ रु०.

५ दिवस ६ तास $= ५\text{ दि} + \frac{६\text{ दि}}{२४} = \left(५ + \frac{६}{२४}\right)$ दिवस.

$= ५\frac{६}{२४}$ दिवस.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. क.

१. $\frac{४}{१६}$, $\frac{६\text{ रुपये}}{८}$, $\frac{१५\text{ पायली}}{१२\text{ पायली}}$ व $\frac{५}{४\text{ रु.}}$ ह्या प्रत्येक जोडींत अंश व छेद कोणते? आणि भाज्यभाजकांचा अशक्य संबंध कोणता?

२. १२ एकं ह्याचा एकेक १७ वा अंश घेतला, आणि १००१ एकं ह्यांचा एकेक १०००० वा अंश घेतला, तर तें कसें मांडावें?

३. एक पंचमांश, एक पाव, नऊ अर्धुकें, तेवीस तिसरे वांटे, पंचविसांचा एकूणपन्नासावा हिस्सा आणि पांचशें नव्वदांचा प्रयुतांश, हे अंकांनीं मांडा.

४. $\frac{१४}{४}$, $\frac{३०}{१०}$, $\frac{२\text{ अंडी}}{४}$, $\frac{४\times ९}{६}$, $\frac{८\text{ हात}}{२}$ व $\frac{९\text{ मण}}{१२}$, हे अपूर्णांक पहिले प्रकारानें ह्मणजे अंशांच्या संख्या समजून वाचा.

५. वरील अपूर्णांक हे अपूर्ण परिमाण, व संख्या, ह्या दोन अवयवांत विभागून मांडा.

६. वरील अपूर्णांक हे दुसऱ्या प्रकारानें किंवा संख्येचे अंश समजून वाचा. त्यांतील अंश व छेद हीं पदें दाखवा, आणि अंशांना छेदांनीं भागून त्यांच्या किमती काढा.

७. $\frac{१०}{१५}$, $\frac{८५}{६०}$, $३\frac{१}{२}$, $\frac{८८}{११}$, $८\frac{९}{१६}$, $\frac{१२}{१२}$, व $\frac{९९}{१००}$; ह्या प्रत्येक अपूर्णांकाचा प्रकार कोणता तो लक्षणावरून सांगा.

८. $\frac{५}{९}$, $\frac{\frac{३}{७}}{६}$, $\frac{३ \text{ रु.}}{४}$, $\frac{५ \text{ रु.}}{७}$ चे $\frac{४}{८}$, $\frac{\frac{४}{५}}{\frac{८}{१५}}$

२॥ मणांचे $\frac{४}{६}$, १ चे $\frac{१२}{१५}$, $\frac{२\frac{१}{३}}{७\frac{९}{१०}}$, ८ चे $\frac{६}{७}$;

ह्या अपूर्णांकांत एकंचे भाग कोणते, अपूर्णांकाचे भाग कोणते, व भागांच्या मोजदाति कोणत्या, तें पाहून ह्यांचे प्रकार सांगा.

९. ॥=॥। , ५।=॥। हे रेघांचे अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांकांत मांडा.

१०. ४$\frac{५}{३२}$ तोळे, ५$\frac{३}{४}$ पेन्स, ६$\frac{४}{१२}$ मण, १$\frac{२}{३}$ विती, $\frac{१५}{६०}$ घटका, $\frac{५}{१२}$ वर्षं, $\frac{५}{६}$ अयनें, ह्या संयुक्त व अपूर्ण संख्यांचे अर्थ विविध परिमाणांच्या संख्यांनीं सांगा.

व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूपांतर.

१३. पहिल्या परिमाणसंख्येच्या बरोबरीची जी दुसरी परिमाणसंख्या येते, तिला पहिलीचें रूपांतर ह्मणतात, व दुसऱ्या परिमाणाचें रूप ह्मणतात. जसें:– २ रुपयांचे पावले किंवा चतुर्थांश केले, ह्मणजे २ रुपयांना पावल्यांचे किंवा चतुर्थांशांचें रूप दिलें असें ह्मणतात, आणि २ रुपयांचें रूपांतर ८ पावले किंवा $\frac{८ \text{ रु.}}{४}$ आहेत असें ह्मणतात. ह्या रूपांतरांचा उपयोग अपूर्णांकांची मिळवणी, वजावाकी, इत्यादि कृत्यांत करावा लागतो.

१४. प्रकार पहिला. पूर्णांकास इच्छिलेला अंक छेदस्थळीं येईल असें हलक्या परिमाणाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.–इच्छिलेले छेदानें पूर्णांकास गुणून तो गुणाकार अंशस्थळीं लिहावा, व इच्छिलेला छेद छेदस्थळीं लिहावा.

उदाहरण. छेदस्थळीं ६ येतील असें ५ ह्या पूर्णांकास अपूर्णांकाचें रूप दे.

रीतीप्रमाणें. $५ = \frac{५ \times ६}{६} = \frac{३०}{६}$ हें उत्तर.

५ हे पेरू आहेत असें ह्मटलें तर त्यांच्या छेदस्थळीं ६ आणणें ह्मणजे प्रत्येक पेरूच्या ६।६ फोडी करावयाच्या असें होतें तेव्हां ५ पेरूंच्या फोडी ३० होतात आणि $\frac{३०}{६}$ ह्याचा अर्थ, एका

पेरूच्या ६।६ फोडी एवढाल्या ३० फोडी घेणें असें होतें. ह्मणून,*

उपपत्ति — एका रुपयांत अधेल्या २ राहतात, पावले ४ राहतात, व चवल ८ राहतात; तसेंच १ मध्यें द्वितीयांश २, तृतीयांश ३, चतुर्थांश ४, इ० राहतात. अशा रीतीनें कोणत्याही छेदाचीं परिमाणें त्या छेदाइतकींच १ मध्यें राहतात, ह्मणून ह्या अपूर्ण परिमाणांचीं नांवें त्यांच्या छेदांनीं दाखविलीं जातात. ह्या विचारानें पाहतां ६ हा छेद $\frac{१}{६}$ या परिमाणाला असावयाचा, ह्मणून वरच्या उदाहरणाचा अर्थ ५ या पूर्णांकाचे षष्ठांश करणें असा होतो. १ मध्यें षष्ठांश ६ राहतात तेव्हां ५ मध्यें ३० राहतील. येथें $\frac{१}{६}$ हें परिमाण व ३० ही संख्या आहे. हीं गुण्यगुणकाप्रमाणें जोडलीं ह्मणजे $\frac{३०}{६}$ असें रूप येतें. यांत दिलेला पूर्णांक व छेद यांचा गुणाकार अंशस्थळीं आला आहे. व दिलेला छेद छेदस्थळीं आला आहे. याप्रमाणेंच कोणत्याही उदाहरणांत येईल, ह्मणून हीच क्रिया वरील रीतींत सांगितली आहे.

विविधांत भारी परिमाणाचे संख्येला हलक्या परिमाणाचें रूप देतों त्याच नमुन्याचा हा प्रकार आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ख.

१. ८ आणि २७ ह्यांस प्रत्येकीं ५ आणि २७ हे छेद येतील अशीं अपूर्णांकरूपें दे.

२. ३४ आणि १३५ ह्यांस प्रत्येकीं ११ आणि १७ हे छेद येतील अशीं अपूर्णांकरूपें दे.

३. ६, ९, १२ आणि २० ह्यांच्या अपूर्णांकरूपांत सर्वांस १५ छेद येतील असें कर.

४. २५, ३४, १७, १११ ह्यांस २४ हे छेद येतील अशीं अपूर्णांकरूपें दे.

---

* $\frac{६}{१२}$, $\frac{४}{७}$, इत्यादि अपूर्णांकाचा विचार करितांना पहिल्यानें ६, ४ हे पेरू, आंबे, रुपये आहेत असें कल्पून भागांबद्दल मुलांची समजूत करून घ्यावी; पुढें त्यांस सांगावें कीं, पेरू, आंबा, रुपया, अशीं मापें अगर परिमाणें धरण्याबद्दल १ [एकं] हेंच परिमाण धरल्यास, तेच विचार ह्या अपूर्णांकांस लागू पडतील. मग दिलेली उपपत्ति समजावून द्यावी.

१५. प्रकार दुसरा. भागानुबंध पूर्णांकास विषम अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.–पूर्णांकास अपूर्णांकाच्या छेदानें गुणून त्या गुणाकारांत अंश मिळवावा आणि त्या बेरजेखालीं अपूर्णांकाचा छेद लिहावा.

उदा. १ लें. $७\frac{२}{३}$ ह्यांस विषम अपूर्णांकाचें रूप दे.

रीतीप्रमाणें. $७\frac{२}{३} = \frac{७\times३+२}{३} = \frac{२१+२}{३} = \frac{२३}{३}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.––$७\frac{२}{३}$ ह्यांस विषम अपूर्णांकाचें रूप देणें ह्याचा अर्थ ७ पूर्णांक व $\frac{२}{३}$ मिळून एक अपूर्णांक करणें असा आहे. सजातीय व समान परिमाणाच्या संख्या असल्याखेरीज त्यांची बेरीज करतां येणार नाहीं, ह्मणून ७ या पूर्णांकाचे तृतीयांश करावे, तेव्हां त्यांत $\frac{२}{३}$ मिळून एक अपूर्णांक होईल हें उघड आहे. पहिल्या प्रकाराप्रमाणें ७ या तृतीयांशाचें रूप देतां $७ = \frac{७\times३}{३}$ असें येतें. या बरोबरीत $\frac{२}{३}$ मिळविले ह्मणजे—

$$७\frac{२}{३} = \frac{७\times३}{३} + \frac{२}{३} = \frac{२३}{३}$$

हें इच्छिलें रूप येतें. येथें जी कृति केली तीच असल्या कोणत्याही उदाहरणांत केली पाहिजे. ह्मणून हीच कृति वरील रीतींत सांगितली आहे.

हा प्रकार विविधांतल्या उतरत्या भांजणीसारखाच हुबेहुब आहे.

उदा. २ रें.– २॥ ह्यांस विषम अपूर्णांकाचें रूप दे.

रीतीप्रमाणें. $२॥ = २\frac{१}{२} = \frac{२\times२+१}{२} = \frac{४+१}{२} = \frac{५}{२}$ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ग.

खालीं दिलेल्या संख्यांस विषम अपूर्णांकांचीं रूपें दे.

१.	$३\frac{३}{७}$	८.	$१५५\frac{११}{१५}$	१५.	२।·
२.	$१०\frac{२}{९}$	९.	$१२८\frac{११}{१८}$	१६.	३॥.
३.	$२२१\frac{४}{११}$	१०.	$३७\frac{१५}{३७}$	१७.	४।।।·
४.	$१३\frac{१५}{१७}$	११.	$२००\frac{२७}{३०}$	१८.	५~
५.	$३२\frac{११}{१३}$	१२.	$१२५\frac{२२}{२५}$	१९.	७~=
६.	$२००\frac{२९}{३०}$	१३.	$५१४\frac{५}{१६}$	२०.	८~।·
७.	$७१\frac{११}{१२}$	१४.	$१०१\frac{१०}{२१}$	२१.	९~।।।·

२२. सात पूर्णांक तीनपंचमांश. २३. आठ पूर्णांक सातनवमांश.
२४. एकोणीस सहासप्तमांश. २५. त्रेचाळीस नऊदशांश.

---

१६. **प्रकार तिसरा.** विषम अपूर्णांकास पूर्णांकाचें, अथवा भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति. अंशास छेदानें भागून भागाकार येईल तो पूर्णांक समजावा. बाकी राहिल्यास तो पूर्णांक व $\frac{\text{बाकी}}{\text{छेद}}$ हा अपूर्णांक मिळून भागानुबंध पूर्णांक समजावा.

उ. १ लें. $\frac{४५}{९} = ५$. उ. ३ रें. $\frac{११३}{१५} = ७\frac{८}{१५}$.
उ. २ रें. $\frac{५}{४} = १।. = १\frac{१}{४}$. उ. ४ थें. $\frac{७}{२} = ३॥ = ३\frac{१}{२}$.

येथें १ ले उदाहरणांत $\frac{४५}{९}$ हे पेरू आहेत असें ह्मटलें, तर १ पेरूचे सारखे ९ भाग करून तसले ४५ भाग अथवा ४५ फोडी घेतल्या आहेत, असा ह्या अपूर्णांकाचा अर्थ होतो. व ह्यास भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप द्यावयाचें ह्मणजे ह्या फोडी किती पेरूच्या आहेत हें काढावयाचें. ह्मणून ४५ यांस ९ नीं भागावयाचें.

उपपत्ति.—विषम अपूर्णांकांत अंशापेक्षां छेद नेहमीं कमी असतो ह्मणून त्याचा त्यास भाग बरोबर जातो किंवा कांहीं एकं शेष उरतात. शेष राहिल्यास त्याचा भाग पूर्णांकास जोडावा लागतो, तेव्हां भागानुबंध पूर्णांक होतो.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. घ.

खालीं दिलेले विषम अपूर्णांकांस भागानुबंध पूर्णांकांचीं रूपें दे.

१.	$\frac{३७}{९}$	८.	$\frac{३०}{२}$	१५.	$\frac{३५७७}{१०२}$
२.	$\frac{७९}{११}$	९.	$\frac{८१}{१६}$	१६.	$\frac{४१४८}{११७}$
३.	$\frac{३१३}{१३}$	१०.	$\frac{३२९०}{२३}$	१७.	$\frac{४६४१}{२२१}$
४.	$\frac{२२९१}{६७}$	११.	$\frac{१०२३}{२५}$	१८.	$\frac{८२}{१६}$
५.	$\frac{१२४७}{७७}$	१२.	$\frac{३१२७}{७५}$	१९.	$\frac{१३१}{६४}$
६.	$\frac{३१३६}{१५}$	१३.	$\frac{६०००}{३७५}$	२०.	$\frac{१९}{८}$
७.	$\frac{४१}{४}$	१४.	$\frac{३०००}{७५}$	२१.	$\frac{५१}{४}$

२२. १५ पंचमांश. २३. ४० तृतीयांश.
२४. अकरा दशांश. २५. बारा अष्टमांश.
२६. एकशेंपंचवीस नवमांश. २७. सत्तेचाळीस द्वादशांश.

---

१७. प्रकार चवथा. अपूर्णांकास पूर्णांकानें गुणावयाचा.
रीति १ ली.– दिलेल्या पूर्णांकानें अंशास गुणावें.

अथवा

रीति २ री.—दिलेल्या पूर्णांकानें छेदाला भाग तुटल्यास भागावें.

उदाहरण १ लें.—$\frac{३}{८}$ ह्यांस २ ह्यांनीं गुण.
रीति १ ली प्र. $\frac{३}{८} \times २ = \frac{३ \times २}{८} = \frac{६}{८}$ हें उत्तर.
रीति २ री प्र. $\frac{३}{८} \times २ = \frac{३}{८ \div २} = \frac{३}{४}$ हें उत्तर.

येथें $\frac{३}{८}$ हे रुपये आहेत, असें समजावें. ह्मणजे १ रुपयाच्या ८ चवल्या करून ३ चवल्या घेतल्या असा या अपूर्णांकाचा अर्थ होतो. त्याप्रमाणेंच ६ चवल्या घेतल्या असा $\frac{६}{८}$ ह्या अपूर्णांकाचा अर्थ होतो. आणि $६ = ३ \times २$ ह्मणून $\frac{६}{८}$ हे $\frac{३}{८}$ चे दुप्पट आहेत असें लक्षांत येईल. ह्यावरून पूर्णांकानें गुणण्याची उपपत्ति सहज बसेल.

उपपत्ति.—एका भाज्य राशीचे कांहीं समान भाग केले आहेत अशी कल्पना करा. आतां भागसंख्या कायम ठेवून भाज्य दुप्पट अगर तिप्पट केला तर प्रत्येक भाग दुप्पट अगर तिप्पट होईल, आणि भाज्य कायम ठेवून भागसंख्या निमे अगर तृतीयांश केली तरी प्रत्येक भाग दुप्पट अगर तिप्पटच होईल, ही गोष्ट थोड्या विचारानें कळणारी आहे. भाज्य, भागसंख्या व एक भाग ह्यांनाच अंश, छेद, व अपूर्णांक, हीं नांवें दिलेलीं आहेत. ह्यावरून

१८. अपूर्णांकाचा नियम १ ला.–छेद कायम ठेवून अंश गुणला किंवा अंश कायम ठेवून छेद भागला, तर अपूर्णांक गुणला जाईल.

उपपत्ति २ री.—एक ह्या राशीचे कांहीं समान भाग केलेले

केल्या. आतां एकं हा राशि कायम ठेवून भागसंख्या निमे अगर तृतीयांश केली तर प्रत्येक भाग दुप्पट अगर तिप्पट मोठाला होईल, आणि भागसंख्या दुप्पट अगर तिप्पट केली तर, प्रत्येक भाग निम्मे अगर तृतीयांश होईल.

$\frac{३}{८}$ पेरू असा अपूर्णांक घेतल्यास ८ हा छेद १ पेरूच्या कितो फोडी केल्या हें दाखवितो. १ पेरूच्या ८ फोडी न करितां ४ केल्या तर प्रत्येक फोड पहिलीच्या २ पट मोठी होईल व १६ केल्या तर निंपट होईल. $\frac{३}{८}$ पेरू ह्या अपूर्णांकांत, $\frac{१}{८}$ पेरू ह्मणजे १ फोड, हें अपूर्णपरिमाण (माप) असतें व ३ ही अपूर्णपरिमाणांची संख्या असते. ह्मणून,

१९. अपूर्णपरिमाणाचा नियम.–एकं कायम ठेवून छेद भागला तर अपूर्णपरिमाणाची तितकी पट होईल, व छेद गुणला तर अपूर्णपरिमाणाचा तितक्यावा हिस्सा होईल.

अपूर्णपरिमाणाच्या संख्येनें अपूर्णांक दाखविला जातो, ह्यावरून संख्या व अपूर्णपरिमाण ह्यांतून कोणाचीही पट केल्यानें अपूर्णांकाची पट होईल हें उघड आहे.

उ. २ रें. $\frac{३}{५} \times ९ = \frac{२७}{५} = ५\frac{२}{५}$. उ. ३ रें. $\frac{१३}{२७} \times ९ = \frac{१३}{३} = ४\frac{१}{३}$.

उ. ४ थें. $\frac{७}{१५} \times ४ = \frac{२८}{१५} = १\frac{१३}{१५}$. उ. ५ वें. $\frac{१५}{२४} \times ६ = \frac{१५}{४} = ३\frac{३}{४}$.

उ. ६ वें. १८ चार पंचमांश $= \frac{१८ \times ४}{५} = \frac{७२}{५} = १४\frac{२}{५}$.

उ. ७ वें. १२ सहा तेरांश $= \frac{१२ \times ६}{१३} = \frac{७२}{१३} = ५\frac{७}{१३}$.

२०. प्रकार पांचवा. अपूर्णांकास पूर्णांकानें भागावयाचा.

रीति १ ली.–दिलेल्या पूर्णांकानें छेदाला गुणावें

अथवा

रीति २ री.–दिलेल्या पूर्णांकानें अंशास भाग तुटल्यास भागावें.

उदा. १ लें. $\frac{४}{५}$ यांस २ नीं भाग.

रीति १ ली. प्र. $\frac{४}{५} \div २ = \frac{४}{५ \times २} = \frac{४}{१०}$ हें उत्तर.

रीति २ री प्र. $\frac{४}{५} \div २ = \frac{४ \div २}{५} = \frac{२}{५}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.—पूर्वींचा भाज्य राशि कायम ठेवून भागसंख्या दुप्पट अगर तिप्पट केली तर प्रत्येक भाग निमें अगर तृतीयांश होईल, आणि भागसंख्या कायम ठेवून भाज्य राशि निमें अगर तृतीयांश केला तरी प्रत्येक भाग निमें अगर तृतीयांशच होईल. ह्मणून पूर्वींचे नामनिर्देशावरून,

२१. अपूर्णांकाचा नियम २ रा.–अंश कायम ठेवून छेद गुणला, किंवा छेद कायम ठेवून अंश भागला, तर अपूर्णांक भागला जाईल.

उपपत्ति २ री.—ही चवथ्या प्रकाराच्या २ ऱ्या उपपत्तीच्या आधारें विद्यार्थ्यांनीं सांगावी.

उ. २ रें. $\frac{७}{९} \div ६ = \frac{७}{९ \times ६} = \frac{७}{५४}$ | **उ. ४ थें.** $\frac{६}{८} \div २ = \frac{६ \div २}{८} = \frac{३}{८}$.

उ. ३ रें. $\frac{२}{३} \div ५ = \frac{२}{३ \times ५} = \frac{२}{१५}$ | **उ. ५ वें.** $\frac{१०}{३} \div ५ = \frac{१० \div ५}{३} = \frac{२}{३}$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ङ.

१. $\frac{३५}{३६}$ ह्यास ९,१२,१८ ह्यांनीं गुण व ५,७,८ ह्यांनीं भाग.
२. $\frac{१२५}{१४४}$ ह्यास ७,८,१६ ह्यांनीं गुण व ८,२५ ह्यांनीं भाग.
३. $\frac{३२०}{६९३}$ ह्यास २,३,४,५,७ ह्यांनीं गुण व ६,९ ह्यांनीं भाग.
४. $\frac{३२०}{६९३}$ ह्यास ७,८,९,१०, ११ ह्यांनीं भाग व ३,४ ह्यांनीं गुण.
५. पुढें दिलेल्या अपूर्णांकांचे छेद ४८ केल्यास त्यांचे अंश काय येतील ?

$\frac{१}{४}$, $\frac{११}{२४}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{२२}{१२}$, व $\frac{१०}{२४}$.

६. पुढें दिलेल्या अपूर्णांकांचे अंश ६४ केल्यास छेदस्थानीं काय संख्या येतील ?

$\frac{१६}{२०}$, $\frac{८}{१२}$, $\frac{४}{१४}$, $\frac{३२}{२५}$ व $\frac{१}{१२}$.

७. पुढील अपूर्णांकांत छत्तिसांश किती आहेत ?

सातबारांश; चारतृतीयांश; पांचचतुर्थांश; सातनवमांश; पांचद्वादशांश.

$\frac{७}{१८}$, $\frac{१०}{१२}$, $\frac{७}{१२}$, $\frac{५}{६}$ व $\frac{४}{९}$.

८. पुढें दिलेल्या बरोबरींत सोडलेली संख्या मांडून दाखवा.

$\frac{७}{१२} = \frac{}{४८}$; $\frac{२}{१२} = \frac{६}{}$; $\frac{५०}{३०} = \frac{२५}{}$; $\frac{१८}{१२} = ३$.

२१. प्रकार सहावा. अपूर्णांकाला नेमलेल्या छेदाचें किंवा अंशाचें रूप देण्याचा.

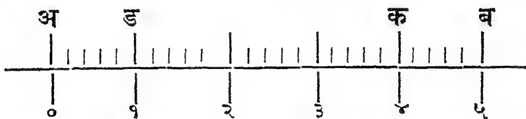
रीति.–अंश व छेद ह्या दोहोंस एकाच संख्येनें गुणिलें किंवा भागिलें तर त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाहीं. ह्या नियमाचे आधारें नेमलेल्या स्थळीं नेमलेला अंक आणावा.

उदा०–$\frac{५}{७}$ ह्या अपूर्णांकाला छेद १४ येईल असें रूप दे, आणि $\frac{३६}{४८}$ च्या बरोबरीचा व १८ ह्या अंशाचा अपूर्णांक उत्पन्न कर.

नेमलेला छेद १४ हा ७ चे २ पट आहे, आणि अंश १८ हा ३६ चा २ रा हिस्सा आहे. ह्मणून रीतीप्रमाणें.

$$\frac{५}{७}=\frac{५\times२}{७\times२}=\frac{१०}{१४};\ \frac{३६}{४८}=\frac{३६\div२}{४८\div२}=\frac{१८}{२४}.$$

वरील नियमाची समजूत थोडक्यांत देतां येते ती अशीः—



अपासून बपर्यंत अंतर ५ इंच आहे. आणि अपासून कपर्यंत अंतर ४ इंच आहे. व अड हें अंतर १ इंच आहे. अब अंतर १ धरल्यास अक अंतर $\frac{४}{५}$ होईल. आणि प्रत्येक अड अशा १ इंचाचे ५।५ भाग केले तर--

अक अंतर = $\frac{२०}{२५}$ = $\frac{४\times५}{५\times५}$ होईल. पण दोन्हीं वेळेस अक अंतर एकच आहे. ह्मणून $\frac{४}{५}=\frac{४}{५}\times\frac{५}{५}$. *

उपपत्ति.—इष्ट संख्येनें अंश गुणला, ह्मणजे अपूर्णांकाची तितकी पट होते (क. १७). नंतर त्याच इष्ट संख्येनें छेद गुणला ह्मणजे त्या पटीचा तितक्यावाच हिस्सा होतो (क. २०). अपूर्णांकाची कांहीं पट करून त्या पटीचा तितक्यावाच हिस्सा

* मागें पेरू वगैरे एक धरावे ह्मणून सांगितलें. कधीं कधीं रेघांचा उपयोग केला असतां समजूत कशी लवकर पडते हें वरील उदाहरणावरून लक्षांत येईल. जेथें जसें उपयोगीं पडेल तसें परिमाण घेऊन मुलांची शिक्षकानें समजूत करून द्यावी.

काढिला, तर ह्या विरुद्ध कृत्यांनीं मूळचाच अपूर्णांक आला पाहिजे हें उघड आहे. अशाच रीतीनें प्रथम अंश भागून मग त्याच भाजकानें छेद भागिला असतां अपूर्णांकाचा प्रथम हिस्सा होऊन नंतर त्या हिश्शाची तितकीच पट होते, ह्मणून ह्याही विरुद्ध कृत्यांनीं अपूर्णांकाची किंमत पूर्ववत् राहते हें सिद्ध आहे. ह्यावरून अपूर्णांकाचे अंशछेदांस एकाच संख्येनें गुणिलें अगर भागिलें, तर त्याची किंमत बदलणार नाहीं हें उघड आहे.

उ० ३ रें. $\frac{७}{१२}$, $\frac{९}{१६}$ व $\frac{८}{२७}$ ह्या अपूर्णांकांना ४३२ हा छेद आणा.

आतां $४३२ \div १२ = ३६$ ह्मणून $\frac{७}{१२} = \frac{७ \times ३६}{१२ \times ३६} = \frac{२५२}{४३२}$;

तसेंच $४३२ \div १६ = २७$,, $\frac{९}{१६} = \frac{९ \times २७}{१६ \times २७} = \frac{२४३}{४३२}$;

व $४३२ \div २७ = १६$,, $\frac{८}{२७} = \frac{८ \times १६}{२७ \times १६} = \frac{१२८}{४३२}$.

उ० ४ थें. $३\frac{७}{८}$ ची ४ पट आणि $\frac{३५}{६४}$ चा ७ वा हिस्सा ह्यांच्या किमती काढा.

$$३\frac{७}{८} \times ४ = \frac{३१}{८} \times ४ = \frac{३१}{२} = १५\frac{१}{२}; \quad \frac{३५}{६४} \div ७ = \frac{५}{६४}.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. च.

१. $\frac{५}{७}$, $\frac{११}{१२}$ व $\frac{१३}{१४}$ ह्या अपूर्णांकांना ८४ छेद येईल अशीं त्यांच्या बरोबरीचीं रूपें द्या.

२. $\frac{७}{१३}$, $\frac{१६}{२५}$, व $\frac{४९}{६५}$ ह्या अपूर्णांकांचा असा रूपभेद करा कीं, त्यांना ३२५ हा साधारण छेद यावा.

३. $\frac{१४}{१७}$, $\frac{१८}{२५}$, $\frac{२१}{३२}$ व $\frac{२७}{३५}$ ह्यांना ७५६ हा साधारण अंश येईल असे त्यांच्या बरोबरीचे अपूर्णांक उत्पन्न करा.

४. $\frac{११२}{९१}$, $\frac{४२५}{३५७}$ व $\frac{३३४१}{५१४०}$, ह्यांना अनुक्रमें १३, २१, व २० हे छेद येतील अशीं रूपें द्या.

५. $१७\frac{२}{३}$, $२५\frac{४}{९}$ व $१३\frac{५}{६}$, ह्यांना साधारण छेद १८ येईल अशीं विषम अपूर्णांकांचीं रूपें द्या.

६. $४१\frac{७}{८}$, $२३\frac{११}{१२}$, $७\frac{१५}{१६}$ व $९\frac{९}{३०}$ ह्या सर्वांना २४० छेद येईल अशीं भागजाति अपूर्णांकाचीं रूपें द्या.

७. पुढील अपूर्णांकांच्या किमती काढा.

$\frac{१७}{२४} \times ८$; $\frac{१२}{१३} \times १३$; $\frac{८}{११} \times १२$; $५\frac{१३}{३५} \times ७$; $९\frac{८}{१७} \times १७$; $६\frac{४}{९} \times ११$.

८. $\frac{४५}{४९} \div ९$; $\frac{१५}{१९} \div ७$; $\frac{११७}{१२०} \div १३$; $\frac{१४३}{२०३} \div ११$; $७\frac{६}{७} \div १२$; $९\frac{१२}{१७} \div १५$.

९. पुढें दिलेल्या अपूर्णांकांत साठांश किती आहेत?

$\frac{५}{१५}$; $\frac{६}{२०}$; $\frac{५}{१२}$; $\frac{४}{६}$ व $\frac{५}{३}$.

१०. पुढें दिलेल्या बरोबरींत सोडलेले अंश व छेद मांडून दाखवा.

$\frac{३}{५} = \frac{}{२०}$; $\frac{६}{११} = \frac{}{४४}$; $\frac{५}{१७} = \frac{}{३४}$; $\frac{१२}{३०} = \frac{}{५}$;
$\frac{१४}{१९} = \frac{२८}{}$; $\frac{१५}{३०} = \frac{३}{}$; $\frac{१४}{५६} = \frac{१}{}$ व $\frac{१८}{१२} = \frac{३६}{}$.

---

२३. प्रकार सातवा. अपूर्णांकांस संक्षेपरूपें द्यावयाचा.

रीति १ ली.—अपूर्णांकाचा अंश व छेद ह्यांस जो साधारण भाजक असेल त्यानें भागावें. जो नवा अपूर्णांक येईल त्याचे अंश व छेद ह्यांस पुनः साधारण भाजकानें भागावें ह्मणजे संक्षेपरूप येतें. ह्याप्रमाणेंच साधारण भाजक आढळेनासा होईतोंपर्यंत भागीत गेलें ह्मणजे अपूर्णांकाला **अतिसंक्षेपरूप** येईल.

उपपत्ति.—अंश व छेद ह्या दोहोंस एकाच संख्येनें भागलें असतां त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाहीं, हें सहावे प्रकारावरून लक्षांत आलेंच असेल. ह्मणून वर सांगितलेल्या रीतीप्रमाणें केलें ह्मणजे दिलेल्या अपूर्णांकाची किंमत न बदलतां त्याला अतिसंक्षेपरूपही देतां येतें.

उ. $\frac{२७०}{३७५}$ ह्यास अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.

$$\frac{२७०}{३७५} = \frac{२७० \div ५}{३७५ \div ५} = \frac{५४}{७५} = \frac{५४ \div ३}{७५ \div ३} = \frac{१८}{२५}$$ हें उत्तर.

रीति २ री.—अंश व छेद ह्यांचा दृढभाजक (साधारण अवयवांचा गुणाकार) काढून त्यानें ते भागून एकदम अतिसंक्षेपरूप द्यावें.

ह्या रीतीनें कृत्य फार लांब पडतें, ह्मणून लोक दृढभाजक

काढण्याच्या खटपटींत बहुधा पडत नाहींत. परंतु एखाद्या अपूर्णांकास अतिसंक्षेपरूपच द्यावयाचें असलें ह्मणजे, तेथें दृढभाजकाचाच उपयोग करितात. उदाहरण $\frac{२५९१}{४१८१}$ ह्याचे अंश व छेद ह्यांस ११३ ह्यांनीं भागून $\frac{२३}{३७}$ हें अतिसंक्षेपरूप येतें, परंतु ही भाजक संख्या दृढभाजक काढल्यावांचून समजणें कठीण ह्मणून अशा ठिकाणीं दृढभाजकच काढावा लागतो.

उ. २ रें. $\frac{४११७}{९४८७}$ ह्यास अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.
आतां ४११७ आणि ९४८७ ह्यांचा दृढभाजक १७९ आहे.
ह्मणून १७९) $\frac{४११७}{९४८७} = \frac{२३}{५३}$ हें उत्तर.

उ. ३ रें. $\frac{१३५३६}{१७४८४}$ ह्यास अतिसंक्षेपरूप द्यावयाचें.
अंश व छेद ह्यांचा दृढभाजक ५६४ आहे. ह्मणून ५६४) $\frac{१३५३६}{१७४८४} = \frac{२४}{३१}$ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. छ.

पुढील अपूर्णांकास संक्षेपरूपें द्या.

१. $\frac{३२४}{७२०}$; $\frac{७२०}{८५६}$; $\frac{३२४}{३९२}$, $\frac{१५८४}{५९४०}$.
२. $\frac{३९}{५२}$. ३. $\frac{३५}{४२}$. ४. $\frac{१२}{३६}$. ५. $\frac{२१}{२८}$.
६. $\frac{७५}{१००}$. ७. $\frac{९९}{१३२}$. ८. $\frac{६०}{१४४}$. ९. $\frac{३६}{१०८}$.
१०. पंधरा एकविसांश. ११. बेचाळीस त्रेसष्टांश

पुढील अपूर्णांकास अतिसंक्षेपरूपें द्या.

१२. $\frac{१२९६}{१६२०}$; $\frac{३४५२}{२१७८}$; $\frac{४९५}{१२१०}$; $\frac{१२९६}{१७२८}$.
१३. $\frac{१८७२}{२०१६}$; $\frac{९९०}{१९३५}$; $\frac{३०००}{३३७५}$; $\frac{२५९२}{३४५६}$.
१४. $\frac{१४८५}{२१६०}$, $\frac{८६४}{३०७२}$; $\frac{३३००}{४२३५}$; $\frac{५९३०}{८११८}$.
१५. $\frac{५५४४}{६५५२}$; $\frac{७०४०}{७३९२}$; $\frac{११३८५}{१६३३५}$; $\frac{२२१७६}{२३३२८}$.
१६. $\frac{३२१}{७४९}$; $\frac{५१०}{११२२}$; $\frac{२९९}{५२९}$.
१७. $\frac{१४०७}{४३३२}$; $\frac{१९०५}{३१७५}$; $\frac{८२५१}{१४७१८}$.
१८. $\frac{६५०९}{७८८९}$; $\frac{१५८९}{२२७०}$; $\frac{१७१५}{२६१५}$.
१९. $\frac{३५७५}{४७१९}$; $\frac{१२६१}{४४२३२}$; $\frac{१०७५९}{२०४०५}$.
२०. अडतीस सत्तावनांश; बावन अठ्याहत्तरांश.

---

२४. प्रकार आठवा. प्रभागजाति अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.–सर्व अंशांचा गुणाकार अंशस्थलीं लिहावा, आणि छेदांचा गुणाकार छेदस्थलीं लिहावा, ह्मणजे इच्छिलें रूप येईल.

उ. १ लें.– $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ ह्या प्रभागजाति अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकाचें रूप दे.

$\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ = $\frac{८}{१५}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.—$\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ घ्यावयाचे ह्मणजे $\frac{२}{३}$ ह्याची $\frac{४}{५}$ पट घ्यावयाची, ह्मणजे $\frac{२}{३}$ ह्यांच्या ४ पटीचा ५ वा हिस्सा घ्यावयाचा. आतां चवथे प्रकाराप्रमाणें, जितकी पट करायाची तितक्यांनीं अंशास गुणावें असें आहे, आणि पांचवे प्रकाराप्रमाणें जितक्याचा हिस्सा घ्यावयाचा तितके पट छेद वाढवावा असें आहे, ह्मणून वरची रीति अंशांनीं अंश गुणावे आणि छेदांनीं छेद गुणावे अशी निघाली. अथवा $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ याचा अर्थ $\frac{२}{३}$ चे पंचमांश ४ असा होतो ह्मणजे $\frac{२}{३}$ ह्या अपूर्ण एकला ५ नीं भागावें आणि भागाकाराची ४ पट करावी असा होतो. हीच कृति वरील रीतींत सांगितली आहे.

२५. सूचना १ ली.—चा, चे यांनीं जोडलेल्या अवयवांत भागानुबंध पूर्णांक अगर नुस्ते पूर्णांक असले, तर त्यांस प्रथम विषम अपूर्णांकांचीं रूपें द्यावीं, आणि मग वरील रीति लावावी.

उ. २ रें. २$\frac{३}{४}$ चे ५ चे ३$\frac{१}{२}$. ह्या प्रभागजाति अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकाचें रूप दे.

सू. प्र. २$\frac{३}{४}$ चे ५ चे ३$\frac{१}{२}$ = $\frac{११}{४}$ चे $\frac{५}{१}$ चे $\frac{७}{२}$ = $\frac{११\times५\times७}{४\times१\times२}$

= $\frac{३८५}{८}$ = ४८$\frac{१}{८}$ हें उत्तर.

२६. सूचना २ री.—प्रभागजाति अपूर्णांकांत कोणताही अंश व कोणताही छेद ह्यांस संक्षेप गेल्यास द्यावा ह्मणजे अतिसंक्षेपरूप येईल.

उ. ३ रें. $\frac{३}{४}$ चे $\frac{८}{९}$ चे $\frac{२७}{१०}$. ह्यास भागजातीचें रूप द्या.

सू. प्र. $\frac{३}{\underset{१}{\cancel{४}}}$ चे $\frac{\overset{१}{\cancel{\overset{२}{\cancel{८}}}}}{\underset{१}{\cancel{९}}}$ चे $\frac{\overset{३}{\cancel{२७}}}{\underset{५}{\cancel{१०}}}$ = $\frac{३}{१}$ चा $\frac{१}{१}$ चे $\frac{३}{५}$.

$= \frac{३ \times १ \times ३}{१ \times १ \times ५} = \frac{९}{५} = १\frac{४}{५}$ हें उत्तर.

उ. ४ थें. २॥ चा ·।· चे ४८- ह्या प्रभागजाति अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकाचें रूप दे.

हा प्रभागजाति व्यवहारी अपूर्णांकरूपानें लिहितां,

$\frac{५}{२}$ चा $\frac{१}{४}$ चे $\frac{६५}{१६} = \frac{५ \times १ \times ६५}{२ \times ४ \times १६}$

$= \frac{३२५}{१२८} = २\frac{६९}{१२८}$ हें उत्तर.

टीप १ ली.—$\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ याचा अर्थ $\frac{२}{३}$ ची $\frac{४}{५}$ पट असा होतो. कोणत्याही प्रभागजातीचा असाच अर्थ व्हावयाचा. ह्यावरून प्रभागजातीचा एक अवयव परिमाण किंवा गुण्य दाखवितो, दुसरा अवयव संख्या किंवा गुणक दाखवितो, आणि चा, चे, हे वर्ण × ह्या गुणनचिन्हाचें कार्य करितात, असें ह्मटलें पाहिजे.

टीप २ री.—परिमाणपरिमाणांचा गुणाकार संभवत नाहीं. ह्यावरून प्रभागजातीमध्यें एकच अवयव परिमाणवाचक संभवेल अर्थात् वरच्या चवथ्या उदाहरणांत २॥ हे रुपये असले, तर ·।· व ४८- हे भावसंख्या दाखविणारे असले पाहिजेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणं. ज.

पुढील प्रभागजाति अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकांचीं रूपें दे.

१. $\frac{१}{२}$ चे $\frac{५}{६}$ चे ४. २. $\frac{१}{३}$ चे $\frac{५}{७}$ चे $६\frac{३}{४}$ चे $\frac{४}{५}$ चे ३.

३. $\frac{२}{३}$ चा $\frac{१}{४}$ चे $३\frac{१}{२}$. ४. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{३}{५}$ चे $\frac{५}{८}$. ५ $\frac{२}{३}$ चे $३\frac{१}{११}$ चे $९\frac{१}{६}$.

६. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{८}$ चे $\frac{३}{१०}$. ७ $\frac{२}{७}$ चे $\frac{५}{८}$ चे $३\frac{१}{२}$. ८. $४\frac{१}{५}$ चे $२\frac{३}{४}$ चे १०.

९. $२\frac{१}{२}$ चे $\frac{३}{५}$ चे $७\frac{१}{३}$. १०. $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{८}$ चे $७\frac{१}{२}$. ११. $३\frac{१}{७}$ चे $१\frac{५}{९}$ चे $२\frac{३}{८}$.

१२. $\frac{६}{७}$ चे $१\frac{१}{२}$ चे ९ चे $६\frac{१}{८}$. १३ $\frac{१२}{१३}$ चे $२\frac{२}{३}$ चा $१\frac{१}{२५}$ चे $१\frac{११}{६४}$.

१४. $\frac{४}{१५}$ चे $\frac{९}{२१}$ चे $\frac{५}{८}$ चे ७. १५ $\frac{३}{८}$ चे $६\frac{१}{२}$ चे $\frac{१३}{१४}$ चे $\frac{७}{२६}$.

१६. $\frac{३}{११}$ चे $१\frac{२}{९}$ चे $५\frac{१}{३}$ चा $\frac{१}{४}$. १७. $१\frac{१}{२}$ चे $२\frac{१}{२}$ चे $३\frac{३}{४}$ चे $४\frac{४}{५}$.

१८. $३\frac{५}{९}$ चे $२\frac{१}{४}$ चे $\frac{३}{८}$ चे $\frac{७}{१५}$. १९. $\frac{७}{११}$ चे $२\frac{१}{२}$ चे $\frac{३}{७}$ चे $१०\frac{१}{२}$.

२०. २॥ चे ३॥। चे $२\frac{३}{५}$ चे ७ २१. ५॥ चे ३।- चे $२\frac{१}{५}$ चे ७.

२२. १३।= चे ८= चे ।= चे ५. २३. ·॥· चा ८- चा ·।· चा ८-.

२४. ५ᐟ। चे ३ चे ७॥· २५. ०– चा ०– चा ०– चे ५॥.

---

२७. **प्रकार नववा. मिश्र अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.**

रीति.—अंशाचे अंश आणि छेदाचे छेद यांचा गुणाकार अंशस्थानीं लिहावा, आणि अंशाचे छेद आणि छेदाचे अंश यांचा गुणाकार छेदस्थानीं लिहावा, ह्मणजे मिश्र अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकाचें रूप येतें. जसें.—

उदा. १ लें. $\frac{\frac{२}{३}}{\frac{४}{५}} = \frac{२\times५}{३\times४} = \frac{१०}{१२} = \frac{५}{६}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.—या उदाहरणाचा अर्थ $\frac{२}{३}$ ह्यास $\frac{४}{५}$ ह्यांनीं भागावयाचें असा आहे. आतां $\frac{४}{५}$ चे ५ पट ४ आहेत ह्यावरून हें स्पष्ट आहे कीं $\frac{२}{३}$ ह्यास ४ च्या पंचमांशांनीं भागण्याबद्दल नुसत्या ४ नींच जर भागलें तर भाजक ५ ह्या छेदाइतके पट मोठा घेतला जाईल, ह्मणून भागाकार यावा त्याच्या पांचव्या हिश्शाइतका लहान येईल ह्मणून पहिल्यानेंच $\frac{२}{३}$ ह्यांची ५ पट केली आणि नंतर त्यास ४ नीं भागलें ह्मणजे अपूर्णांकाचे किमतींत फरक पडणार नाहीं.

२८. सूचना—सातवे प्रकारावरून असेंही लक्षांत येईल कीं मिश्र अपूर्णांकाचे अंश व छेद यांत अंशाअंशांत व छेदाछेदांत संक्षेप गेला असतां बेलाशक द्यावा.

उ. २ रें. $\frac{२\frac{५}{८}}{७} = \frac{\frac{२१}{८}}{\frac{७}{१}} = \frac{\frac{३}{८}}{\frac{१}{१}} = \frac{३}{८}$.

उ. ३ रें. $\frac{५}{३\frac{३}{४}} = \frac{\frac{५}{१}}{\frac{१५}{४}} = \frac{१\times४}{३\times१} = १\frac{१}{३}$.

उ. ४ थें. $\frac{१\frac{७}{१०}}{१०\frac{१}{५}} = \frac{\frac{१७}{१०}}{\frac{५१}{५}} = \frac{\frac{१}{१०}}{\frac{३}{५}} = \frac{\frac{१}{२}}{\frac{३}{१}} = \frac{१\times१}{२\times३} = \frac{१}{६}$.

---

२९. **प्रकार दहावा. अपूर्णांकास समच्छेदरूपें देण्याचा ह्मणजे दिलेल्या अपूर्णांकांचीं परिमाणें सारखीं करण्याचा**

रीति.—अतिसंक्षेपरूपी अपूर्णांकास लघुतम समच्छेदरूपें देणें असलीं तर त्या सर्वांच्या छेदांचा ल. सा. भा. अवयवरू-

पांत काढावा. त्या अवयवांतून प्रत्येकाच्या छेदाचे अवयव व-गळून बाकी अवयव ज्याच्या त्याच्या अंशछेदांना गुणक द्यावे, ह्मणजे सर्वांच्या छेदस्थळीं तो ल. सा. भा. येऊन ते छेद स-मान होतील.

उदा० $\frac{३}{८}$, $\frac{११}{१२}$, $\frac{८}{१५}$ व $\frac{१७}{२१}$ ह्यांना लघुतम समच्छेदरूपें दे.

छेद.

$४\times३ \mid \frac{८}{२}-\frac{१२}{१}-\frac{१५}{५}\ \frac{२१}{७}$, ∴ छे. ल. सा. भा. = ४·३·२·५·७

ह्यांतून ८ चे अवयव ४·२ हे वगळतां ३·५·७ = १०५ हा पहिल्या अपूर्णांकाच्या अंशछेदांना गुणक आला. ह्याप्रमाणें दुसऱ्याच्या अंशछेदांचा गुणक २·५·७=७० आला, तिसऱ्या-च्यांचा ४·२·७=५६ आला, आणि चवथ्याच्यांचा ४·२·५=४० आला, ह्मणून रूपांतर प्रकार ६ प्रमाणें.

$$\frac{३}{८}=\frac{३}{८}\times\frac{१०५}{१०५}=\frac{३१५}{८४०};$$

$$\frac{११}{१२}=\frac{११}{१२}\times\frac{७०}{७०}=\frac{७७०}{८४०};$$

$$\frac{८}{१५}=\frac{८}{१५}\times\frac{५६}{५६}=\frac{४४८}{८४०};$$

व
$$\frac{१७}{२१}=\frac{१७}{२१}\times\frac{४०}{४०}=\frac{६८०}{८४०}.$$

उपपत्ति.— दिलेल्या अपूर्णांकास लघुतम समच्छेदरूपें देणें, ह्याचा अर्थ त्या अपूर्णांकाच्या किमती पूर्ववत् राखून व त्यांचे छेद राखवतील तितके लहान राखून सम (एकसारखे) करणें, असा आहे. ह्मणजे ते अपूर्णांक लघुतम सम (साधारण) छेदाचे करणें असा आहे.

अपूर्णांकाचा अंश व छेद ह्या दोहोंस एकाच संख्येनें गुणलें, तर त्या अपूर्णांकाची किंमत न बदलतां त्याचा छेद बदलतां येतो. ह्यावरून ह्याच रीतीनें वेगळाल्या अपूर्णांकाच्या अंशछेदांस वेग-ळाले गुणक देऊन, त्यांना मूळच्याच किमतीचीं समच्छेदरूपें देतां येतील हें उघड आहे. ह्या रूपांतील लघुतम समच्छेद हा प्रत्येका-च्या छेदाची लघुतमपट असावयाचा, त्याअर्थीं तो सर्वांच्या छे दांचा ल. सा. भा. असला पाहिजे. ह्मणून दिलेल्या अपूर्णांकांच्या छेदांचा ल. सा. भा. काढण्याचें वरील रीतींत सांगितलें आहे.

दुसरें, ह्या ल. सा. भाज्याच्या अवयवांतून एका अपूर्णांकाच्या छेदाचे अवयव वजा केले ह्मणजे जे अवयव बाकी राहतात, ते त्या छेदाच्या कितीपट हा ल. सा. भा. आहे हें दाखवितात. ह्मणून ह्या अवयवांच्या संख्येनें त्या अपूर्णांकाचे अंशछेद गुणले असतां त्याची किंमत पूर्ववत् राहून, त्याच्या छेदस्थळीं हा ल. सा. भा. येईल हें उघड आहे.

तिसरें, उदाहरणांतील अपूर्णांक जर अतिसंक्षेपरूप दिलेले नसले तर त्यांच्या अंशछेदांतले जे साधारण अवयव ते छेदांच्या ल. सा. भाज्यांत राहतील, यामुळें त्यांना लघुतम समच्छेदरूपें येणार नाहींत, नुसतीं समच्छेदरूपें येतील. ह्मणजे त्यांच्या छेदस्थळीं त्यांच्या अतिसंक्षेपरूपांच्या लघुतम समच्छेदाची त्या साधारण अवयवाइतकी पट येईल. उदाहरणार्थ, $\frac{५}{१०}$ व $\frac{१८}{२४}$ हे अपूर्णांक, आणि $\frac{१}{२}$ व $\frac{३}{४}$ हीं त्यांचीं अतिसंक्षेपरूपें, ह्यांना वरील रीतीनें समच्छेदरूपें देऊन, त्यांना येणारे छेद तपासून पहा. असा प्रकार हरएक उदाहरणांत घडावयाचा, ह्मणून लघुतम समच्छेदरूपें देण्याला अतिसंक्षेपरूपी अपूर्णांक घ्यावे असें वरील रीतींत सुचविलें आहे.

३०. सूचना १ ली.—पहिल्या अपूर्णांकाला छेद येईल तोच पुढील अपूर्णांकांना मांडीत जावा, ह्मणजे बरेच गुणाकार करणें टळतील.

३१. सूचना २ री.—अपूर्णांकांचे छेद सारखे झाले ह्मणजे $\frac{\text{एक}}{\text{छेद}}$ हें अपूर्ण परिमाण (माप) सर्व अपूर्णांकांस एकच होतें, ह्मणून ज्याची अंशसंख्या मोठी तो अपूर्ण राशि मोठा, व ज्याची अंशसंख्या लहान तो अपूर्ण राशि लहान, असा अंशांच्या संख्यांवरून अपूर्णांकाच्या राशींचा लहानमोठेपणा कळतो वरील अपूर्णांक हे प्रथम लहान व पुढें मोठा असे मांडले तर

$$\frac{३१५}{८४०},\ \frac{४४८}{८४०},\ \frac{६८०}{८४०} \text{ व } \frac{७७०}{८४०};$$

ह्मणजे $\frac{३}{८},\ \frac{८}{१५},\ \frac{१७}{२१}$ व $\frac{११}{१२}$;

असा त्यांचा क्रम येतो. ह्यावरून $\frac{३}{८}$ हा सर्वांत लहान व $\frac{११}{१२}$ हा सर्वांत मोठा, असें ठरतें.

३१. सूचना २ री.—आतां $\frac{३}{२}$ व $\frac{३}{४}$ हे समान अंशाचे अपूर्णांक पहा. $\frac{३}{२} = ३ \times \frac{१}{२}$ व $\frac{३}{४} = ३ \times \frac{१}{४}$ आहेत. ह्या दोहोंच्या संख्या समान आहेत, तरी पहिल्याच्या 'द्वितीयांश' ह्या परिमाणापेक्षां दुसऱ्याचें 'चतुर्थांश' हें परिमाण लहान आहे ह्मणून पहिला अपूर्णांक मोठा व दुसरा लहान आहे असें ठरतें. ह्यावरून अपूर्णांकांचे अंश सारखे केले तर ज्याचा छेद लहान तो अपूर्णांक मोठा, व ज्याचा छेद मोठा तो अपूर्णांक लहान, ह्या धोरणानें तेही क्रमानें मांडतां येतील.

रीति २ री.—प्रत्येक अपूर्णांकाच्या अंशच्छेदांना त्याखेरीज अपूर्णांकांच्या छेदांनीं गुणावें, ह्मणजे सर्वांना समच्छेदरूपें येतील.

उदा० $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{५}$ व $\frac{६}{७}$, ह्यांना समच्छेदरूप देणें.

ह्यांना सर्वांच्या छेदांचा गुणाकार हा साधारण छेद आणण्याचें ठरवून, प्रत्येकाच्या अंशछेदांना इतरांच्या छेदांचा गुणक दिला, तर रूपांतर प्रकार ६ प्रमाणें असें येतें कीं,—

$$\frac{२}{३} = \frac{२}{३} \times \frac{३५}{३५} = \frac{७०}{१०५}$$

$$\frac{४}{५} = \frac{४}{५} \times \frac{२१}{२१} = \frac{८४}{१०५}$$

व
$$\frac{६}{७} = \frac{६}{७} \times \frac{१५}{१५} = \frac{९०}{१०५}.$$

३२. सूचना.—दिलेल्या अपूर्णांकांच्या छेदांना साधारण अवयव नसला तरच ह्या रीतीनें त्यांना ल. स. रूपें येतील, पण त्यांना साधारण अवयव असला तर त्या अपूर्णांकांना नुसतीं समच्छेदरूपें येतील. ह्मणजे छेदांच्या ल. सा. भाज्याची पट ही सर्वांच्या छेदस्थळीं येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. झ.

पुढील अपूर्णांकांस समच्छेदरूपें द्या.

१. $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{२}{७}$. २. $\frac{५}{६}$, $\frac{४}{७}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{२}{११}$.

३. $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{८}$. ४. $\frac{१}{८}$, $\frac{५}{२}$, $\frac{३}{१६}$, $\frac{१६}{१८}$.

५. $\frac{१}{२}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{१५}{१६}$, $\frac{३१}{३२}$. ६. $\frac{५}{६}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{१३}{२४}$.

पुढील अपूर्णांकांस लघुतम समच्छेदरूपें द्या.

७. $\frac{७}{१६}$, $\frac{११}{१८}$, $\frac{१७}{२४}$, $\frac{१९}{३६}$, $\frac{२५}{४८}$.

८. $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{९}$, $\frac{१६}{२७}$, $\frac{८}{८१}$, $\frac{१६}{२४३}$.

९. $\frac{४}{७}$, $\frac{३}{१०}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{१७}{३५}$, $\frac{४}{६३}$, $\frac{१७}{२८}$.

१०. $\frac{११}{२७}$, $\frac{१७}{२४}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{१५}$, $\frac{२}{९}$, $\frac{३५}{३६}$.

११. $\frac{३}{५}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{६}{२५}$, $\frac{११}{३८}$, $\frac{१३}{४५}$; $\frac{२६}{६०}$.

१२. $\frac{५}{७}$, $\frac{११}{१२}$, $\frac{८}{२७}$, $\frac{९}{३६}$, $\frac{१७}{४८}$.

१३. $३\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{५}{६}$, $७\frac{१}{४}$, ८॥·, ९८-.

१४. ३।·, ५८-, $\frac{५}{६}$, $३\frac{१}{४}$, ६८=, २।-.

१५. $२\frac{१}{६}$, $३\frac{८}{१५}$, $२\frac{१}{२४}$, ७॥, ५।=, $४\frac{४}{५}$.

१६ अपूर्णांक मोठा कोणता $\frac{१५}{१९}$ का $\frac{१५ + ८}{१९ + ८}$?

व $\frac{१५}{१९}$ का $\frac{१५-८}{१९-८}$?

पुढील संख्या मोठेपणाचे क्रमानें मांडा.

१७. $\frac{८}{१७}$, $\frac{९}{२५}$ व $\frac{८+९}{१७+२५}$. १८. $\frac{१३}{१४}$, $\frac{१५}{१६}$ व $\frac{१३+१५}{१४+१६}$.

१९. $\frac{५}{६}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{९}{१०}$ व $\frac{५ + ६ + ७ + ९}{६ + ७ + ८ + १०}$.

पुढच्या संख्यांतील सर्वांत लहान व सर्वांत मोठी ह्या संख्या सांगा.

२०. $\frac{३}{७}$, $\frac{५}{१३}$, $\frac{७}{१८}$, [illegible]. २१. $\frac{१९}{१८}$, $\frac{१५}{१४}$, $\frac{२९}{२७}$, $\frac{३७}{३५}$.

२२. $\frac{१०१}{१३}$, $७\frac{१३}{१७}$, $७\frac{९}{११}$, $\frac{१०९१}{१४३}$.

२३. $\frac{५}{६}$ व $\frac{६}{७}$ ह्यांच्या मधोमध किमतीचा व ८४ ह्या छेदाचा अपूर्णांक काढा; आणि $\frac{२}{५}$ व $\frac{३९}{७२}$ ह्यांच्या मधोमध किमतीचें सातशेंविसांश किती तें दाखविणारा अपूर्णांक काढा.

२४. $\frac{२७}{८७}$, $\frac{११८}{३४१}$, व $\frac{१४५}{४२८}$ ह्यांपैकीं मध्यम किमतीचा अपूर्णांक कोणता ?

२५ $\frac{२}{९}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{१२}{१९}$, $\frac{२१}{२३}$ ह्या अपूर्णांकांना लघुतम समान अंशाचीं रूपें देऊन तीं मोठेपणाचे क्रमानें जुळा.

व्यवहारी अपूर्णांकांची मिळवणी.

२४. संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी करितां येण्याला त्या

संख्यांत साम्य असावें लागतें. चार रुपयांत दोन पावले मिळवून त्यांची बेरीज सहा रुपये किंवा सहा पावले ह्मणतां येत नाहीं. चार रुपयांचे १६ पावले करून नंतर त्यांत २ पावले मिळवावे, तेव्हां १८ पावले ही त्यांची बेरीज येते.

व्यवहारी अपूर्णांकांत तुकड्यांची ह्मणजे अपूर्णांकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करणें असते; ते तुकडे एका जातीचे व एका मानाचे असले पाहिजेत. एका रुपयाचे ४ तुकडे करून त्यांतून दोन घेतले, आणि ८ तुकडे करून त्यांतून दोन घेतले, तर हे दोन प्रकारचे तुकडे सारख्या मानाचे नाहींत. तुकडे सारख्या मानाचे असण्यास छेद एकसारखे पाहिजेत.

३ सप्तमांश आणि ४ सप्तमांश यांची बेरीज ७ सप्तमांश असें ह्मणतां येईल. परंतु ३ सप्तमांश आणि ४ नवमांश यांची बेरीज ७ कांहीं तरी अंश, या बोलण्यांत कांहीं अर्थ नाहीं ह्मणून,

रीति.—दिलेल्या अपूर्णांकांस समच्छेदरूप द्यावें, नंतर अंशांची बेरीज करून ती अंशस्थानीं लिहावी, आणि तिच्या खालीं समच्छेद लिहावा ह्मणजे ती मिळवणी होते.

उ० १ लें. $\frac{३}{५}$ आणि $\frac{१}{५}$ ह्यांची बेरीज करा.

ह्या उदाहरणांत दिलेले अपूर्णांकांचे छेद सम आहेत ह्मणून

$\frac{३}{५} + \frac{१}{५} = \frac{४}{५}$ हें उत्तर.

उ० २ रें. $\frac{२}{३} + \frac{३}{४}$ आणि $\frac{४}{५}$ ह्यांची बेरीज करा.

$\frac{२}{३} + \frac{३}{४} + \frac{४}{५} = \frac{४०}{६०} + \frac{४५}{६०} + \frac{४८}{६०} = \frac{१३३}{६०} = २\frac{१३}{६०}$ हें उत्तर.

२५. सूचना १ ली.— उदाहरणांत कांहीं भागानुबंध पूर्णांक व कांहीं नुसते पूर्णांक असले तर पूर्णांक व अपूर्णांक ह्यांच्या बेरजा वेगळाल्या करून मग त्या दोन बेरजा एकत्र कराव्या.

उ० ३ रें. $२\frac{३}{५} + ३\frac{९}{१०} + ५\frac{५}{१२} + ४.$

$$= २ + ३ + ५ + ४ + \frac{३}{५} + \frac{९}{१०} + \frac{५}{१२}.$$

$$= १४ + \frac{३६ + ५४ + २५}{६०}$$

$$= १४ + \frac{११५}{६०} = १४ + १\frac{५५}{६०}$$

$$= १५\frac{११}{१२}$$ हें उत्तर.

३६. सूचना २ री.—उदाहरणांत विषम अपूर्णांक असल्यास त्यांस भागानुबंध पूर्णांकांचें रूप द्यावें; व प्रभागजाति अपूर्णांक असले तर त्यांस भागजाति अपूर्णांकांचें रूप द्यावें, आणि मग समच्छेद करून मिळवणी अथवा वजाबाकी करावी.

उ० ४ थें. $\frac{११३}{८} + \frac{३}{५}$ चे $\frac{१०}{९} + २\frac{३}{४}$ चे $२\frac{२}{११}$ चे $\frac{५}{८} + ५$.

$= १४\frac{१}{८} + \frac{२}{३} + ३\frac{३}{४} + ५.$

$= १४ + ३ + ५ + \frac{१}{८} + \frac{२}{३} + \frac{३}{४}$

$= २२ + \frac{३+१६+१८}{२४}$

$= २२ + १\frac{१३}{२४}$

$= २३\frac{१३}{२४}$ हें उत्तर.

३७. सूचना ३ री.—उदाहरणांत कांहीं रेघांचे अपूर्णांक असल्यास अवश्य असेल तर त्यांस व्यवहारी अपूर्णांकांचें रूप द्यावें.

उ० ५ वें. $२॥ + \frac{३}{७} = २\frac{१}{२} + \frac{३}{७} = २ + \frac{१}{२} + \frac{३}{७}$

$= २\frac{१३}{१४}$ हें उत्तर.

वरील उदाहरणांत अंशांची मिळवणी करून तिच्या खालीं समच्छेद लिहीत आलों, ह्मणजे संख्यांची मिळवणी करून तिला साधारण परिमाण गुण्य जोडीत आलों. प्रभागजातींतील अपूर्णांक हे संख्या व परिमाण हेच अवयव दाखवीत असतात (प्रकार ८ टीप पहा). ह्यास्तव,

३८. सूचना ४ थी.– प्रभागजाती अपूर्णांकांची मिळवणी करणें असून त्यांत साधारण अवयव असला, तर असाधारण अवयवांची मिळवणी करून तिला तो साधारण अवयव गुण्य जोडावा.

उ. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ आणि $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{७}$ ह्यांची मिळवणी करा.

ह्या उदाहरणांत $\frac{२}{३}$ हा अवयव साधारण आहे. ह्मणून,

$\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५} + \frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{७} = \frac{२}{३}\left(\frac{४}{५} + \frac{५}{७}\right)$

$= \frac{२}{३}\left(\frac{२८}{३५} + \frac{२५}{३५}\right)$

$= \frac{२}{३} \times \frac{५३}{३५} = \frac{१०६}{१०५}$

$= १\frac{१}{१०५}$ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ञ.

पुढील अपूर्णांक मिळवा.

१. $\frac{४}{७}+\frac{२}{७}+\frac{६}{७}+\frac{५}{७}+\frac{३}{७}$. २. $\frac{१}{२}, \frac{१}{४}, \frac{१}{८}, \frac{१}{१६}, \frac{१}{३२}$.

३. $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{७}{८}+\frac{५}{१२}$. ४. $\frac{१}{२}+\frac{३}{४}+\frac{५}{६}+\frac{७}{९}$.

५. $\frac{१३}{१८}+\frac{८}{१५}+\frac{११}{२२}+\frac{१३}{३०}$. ६. $\frac{२}{३}+\frac{१}{६}+\frac{५}{९}+\frac{११}{१२}$.

७. $\frac{७}{८}+\frac{७}{१२}+\frac{७}{१६}+\frac{७}{१८}$. ८. $\frac{३}{१०}+\frac{१३}{१५}+\frac{१}{५}+\frac{४}{९}$.

अपूर्णांक व पूर्णांक हे वेगळाले मिळवून पुढील बेरजा करा.

९. $२\frac{१}{७४}+\frac{११}{७०}+\frac{५}{२१}+\frac{१}{५}+\frac{१७}{२२}$; $२\frac{१}{२}+३\frac{१}{३}+४\frac{१}{४}+५$.

१०. $३\frac{३}{८}+२\frac{५}{६}+\frac{७}{१२}+३\frac{४}{९}$; $२\frac{२}{३}+\frac{३}{५}+४+५\frac{५}{६}$.

११. $१\frac{३}{८}+\frac{१}{६}+\frac{५}{१८}+२\frac{१}{१२}$; $\frac{२}{२७}+११+\frac{५}{५४}+२\frac{७}{४५}+\frac{१}{१०}$.

१२. $\frac{११}{१२}+\frac{१४}{१५}+\frac{२६}{२७}+\frac{३९}{४०}$; $३\frac{१}{४२}+\frac{५}{२१}+\frac{३१}{६३}+१\frac{११}{१४}$.

१३. $१७\frac{१}{३५}+\frac{३}{७}+\frac{४}{२१}+१\frac{७}{१५}$; $\frac{२}{७}$ चे $१८+\frac{२}{५}$ चे $१\frac{१}{२१}$.

१४. $\frac{११}{१२}+१\frac{२}{१५}+\frac{७}{१६}+२\frac{११}{१८}+\frac{१}{२०}$; $१\frac{१५}{१६}+२\frac{२३}{२४}+३\frac{२४}{२५}+४\frac{२९}{३०}$.

पुढील बेरजा भागानुबंध पूर्णांकांस विषम अपूर्णांकांचीं रूपें देऊन करा.

१५. $५\frac{३}{४}+\frac{३}{५}$ चे $७\frac{१}{२}+८\frac{३}{१०}$; $\frac{२}{३}+७\frac{२}{११}+\frac{४}{५}$ चे $\frac{३}{७}$ चे $१०\frac{१}{२}$.

१६. $२\frac{३}{४}$ चे $३\frac{२}{७}+\frac{१११}{१६}+२\frac{४}{५}$ चे $४\frac{१}{८}$ चे $१\frac{३}{८}+४\frac{२}{३}$ चे $\frac{२}{१५}$ चे $२\frac{१}{८}$ चे $१\frac{३}{७}$.

१७. २। चे ३॥ + $५\frac{१}{२}+७\frac{३}{५}$ चे ३॥ + ५.

१८. ·।· चा ८– + $३\frac{३}{४}+७\frac{७}{८}+६$.

१९. ५। + २।= + $३\frac{३}{४}+\frac{११}{१६}$.

पुढील बेरजा असाधारण अवयव कंसांत मिळवून करा.

२०. $\frac{५}{७}$ चे $\frac{८}{९}$, $\frac{५}{७}$ चे $\frac{७}{९}$, व $\frac{५}{७}$ चे $\frac{३}{९}$, $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ चे $\frac{६}{८}$ व $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ चे $\frac{४}{८}$.

२१. $५\frac{७}{८}$ चे $\frac{२}{३}$, $५\frac{७}{८}$ चा $\frac{१}{३}$ व $५\frac{७}{८}$ चे $\frac{३}{३}$; $१२\frac{९}{१०}$ चे $\frac{४}{५}$ व $१२\frac{९}{१०}$.

२२. ५ सकांचे $\frac{३}{५}$, ५ सकांचे $\frac{४}{६}$ व ५ सक; ७ चे $\frac{२}{३}$,
७ चे $\frac{४}{५}$, ७ चे $\frac{१}{१२}$ व ७.

पुढील पदावली सरळ रूपें देऊन सोडवा.

२३. $१\frac{२}{३}$ चे $\frac{१\frac{३}{५} \text{ चे } १\frac{२}{३}}{१\frac{४}{५} \text{ चे } २\frac{२}{३}}+\frac{\frac{४}{५}}{१\frac{४}{५}}$ चा $\frac{१}{३}+\frac{\frac{४}{५} \text{ चे } \frac{४}{७}}{१\frac{५}{७} \text{ चे } १४\frac{२}{५}}+\frac{५}{१८}$.

२४. $\frac{२\frac{२}{३} \text{ चा } १\frac{१}{६}}{१\frac{२}{३} \text{ चे } २} + \frac{१\frac{२}{५} \text{ चे } \frac{२}{७}}{\frac{५}{७} \text{ चा } १\frac{१}{५}} + \frac{\frac{२}{९} \text{ चे } \frac{६}{१३}}{\frac{२}{३} \text{ चे } \frac{१२}{१३}} + \frac{१\frac{१}{३} \text{ चा } १\frac{७}{१३}}{३\frac{२}{३} \text{ चे } २\frac{४}{१३}}$.

२५. $\frac{१\frac{२}{५} \text{ चा } १\frac{९}{११}}{२\frac{८}{११} \text{ चा } १\frac{१}{५}} + \frac{\frac{२}{१३} \text{ चे } ५\frac{१}{७}}{\frac{९}{१३} \text{ चा } १\frac{१}{७}} + \frac{१\frac{१}{५} \text{ चे } \frac{५}{१६}}{\frac{४}{५} \text{ चे } \frac{१५}{१६}} + \frac{३\frac{३}{४} \text{ चे } ३\frac{१}{१३}}{१\frac{१}{४} \text{ चे } १२\frac{४}{१३}}$.

२६. एका मनुष्यानें एका दुकानाचे $\frac{१}{५}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{१}{४}$ व $\frac{७}{४०}$ असे वेगळाल्या वेळीं घेतले, तर त्या दुकानाचे किती कितवे हिस्से त्यापाशीं जमले ?

व्यवहारी अपूर्णांकांची वजाबाकी.

३९. **रीति.**—मिळवणींत सांगितल्याप्रमाणें दिलेले अपूर्णांक समच्छेद करावे, आणि मग **शोध्य** (मोठ्या) अंशांत **शोधक** (लहान) अंश वजा करून बाकी राहील तिच्या खालीं समच्छेद लिहावा.

सूचना.—मिळवणींत दिलेल्या सूचना येथेंही लागू कराव्या.

उ० १ लें. $\frac{४}{५}$ आणि $\frac{१}{५}$ ह्यांची वजाबाकी करा.

रीतीप्रमाणें. $\frac{४}{५} - \frac{१}{५} = \frac{३}{५}$ हें उत्तर.

उ० २ रें. $\frac{९}{१०} - \frac{७}{१५} = \frac{२७}{३०} - \frac{१४}{३०} = \frac{१३}{३०}$ हें उत्तर.

उ० ३ रें. $५\frac{५}{८} - २\frac{१}{२} = (५-२) + (\frac{५}{८} - \frac{१}{२})$

$= ३ + \frac{५-४}{८} = ३ + \frac{१}{८}$

$= ३\frac{१}{८}$ हें उत्तर.

उ० ४ थें. $५\frac{३}{८} - २\frac{१}{२} = (५-२) + (\frac{३}{८} - \frac{१}{२})$

$= ३ + \frac{३}{८} - \frac{४}{८} = ३ + \frac{३-४}{८}$.

येथें ३ ह्यांतून ४ वजा जात नाहींत ह्मणून पूर्णांकांतील वजाबाकींत हातचे घेतों त्याप्रमाणें पूर्णांकांपैकीं एक पूर्णांक ह्मणजे $\frac{८}{८}$ अपूर्णांकांत नेले. तेव्हां,

$३ + \frac{३-४}{८} = २ + \frac{११-४}{८} = २\frac{७}{८}$ हें उत्तर.

उ० ५ वें. $६ - ४\frac{३}{७} = २ - \frac{३}{७} = १\frac{४}{७}$.

उ० ६ वें. $\frac{१}{५}$ चे $२\frac{१}{२}$ चे $१६ - १\frac{३}{७}$ चे $५\frac{१}{२} = ८ - ७\frac{६}{७}$

$= ७\frac{७}{७} - ७ - \frac{६}{७} = \frac{१}{७}$ हें उत्तर.

उ० ७ वें. $\frac{९१}{९६}$ ह्यातून $\frac{२४}{९६}$ व $\frac{३९}{९६}$ ह्यांची बेरीच वजा कर.

$\frac{९१}{९६} - \frac{२४}{९६} - \frac{३९}{९६} = \frac{२८}{९६} = \frac{७}{२४}$ हें उत्तर.

उ० ८ वें. ओसरीच्या जमिनीपासून तक्तपोशी ९$\frac{३}{४}$ फूट उंच आहे, आणि अंगणाची जमीन २$\frac{१}{४}$ फूट खोल आहे, ह्यावरून अंगणाची जमीन व तक्तपोशी ह्यांमध्यें अंतर केवढें आहे ?

येथें उंची व खोली ह्या एकमेकींच्या उलट दिशा दाखविणाऱ्या ह्मणजे विरुद्ध संख्या आहेत. ह्मणून उंची + चिन्हानें दाखविली, तर खोली − चिन्हानें दाखविली पाहिजे. ओसरीच्या जमिनीची उंची खोली शून्य कल्पून तेथून ह्या विरुद्ध मोजद्दाती केल्या आहेत, म्हणून तक्तपोशीची उंची ० + ९$\frac{३}{४}$ फूट, व अंगणाची खोली ० − २$\frac{१}{४}$ फूट असें होतें. ह्या दोन अंतरांची सचिन्ह मिळवणी केली तर.

$$० + ९\tfrac{३}{४} + ० - २\tfrac{१}{४} = + ७\tfrac{२}{४} = ७\tfrac{१}{२}$$

हें अंगणापासून ओसरीची उंची व ओसरीपासून तक्तपोशीची उंची ह्या दोन उंच्यांमधील अंतर येईल, ह्मणजे एक उंची दुसरीहून किती मोठी आहे हें समजेल. पुनः,

$$(० - २\tfrac{१}{४} \text{ फूट}) - (० + ९\tfrac{३}{४}) = - १२ \text{ फूट.}$$

ह्याचा अर्थ आपण तक्तपोशीवर उभें राहून खालीं वांकून दोन्ही अंतरें मोजलीं ह्मणून तीं दोन्ही − २$\frac{१}{४}$ फूट व − ९$\frac{३}{४}$ फूट अशीं लिहिलीं पाहिजेत. व −१२ फूट ह्याचा अर्थ तक्तपोशीचे खालीं १२ फूटावर अंगण आहे. पुनः,

$$(० + ९\tfrac{३}{४} \text{ फूट}) - (० - २\tfrac{१}{४} \text{ फूट}) = १२ \text{ फूट.}$$

ह्याचा अर्थ आपण अंगणांत उभें राहून मान वर करून ओसरीची उंची व तक्तपोशीची उंची मोजली ह्मणून जी उंची आपण ओसरीवर उभें राहून खालीं मोजल्यामुळें −२$\frac{१}{४}$ फूट अशी मांडिली होती ती आतां त्याचे विरुद्ध दिशेनें मोजली आहे ह्मणून ती आतां + २$\frac{१}{४}$ अशीच मांडिली पाहिजे. व १२ फूट ह्याचा अर्थ अंगणापासून तक्तपोशी १२ फूट वर आहे. ह्मणून वरील प्रश्नांत अंगणाची ज़मीन व तक्तपोशी ह्यांमध्यें अंतर केवढें आहे ? ह्या प्रश्ना-

थीं उत्तरें दोन होतील + १२ व − १२. दोन्ही उत्तरांचा अर्थ वरतीं स्पष्ट करून दाखविला आहे.

४०. **सूचना २ री.**–धन व ऋण हीं चिन्हें संख्यांच्या ज्या विरुद्ध प्रकारांचीं दर्शक ठरविलेलीं असतील, त्यांच्याच धोरणानें त्यांचे अर्थ लावावे.

४१. **सूचना ३ री.**–दिलेल्या संख्येंत धन अगर ऋण जी संख्या वजा करणें असेल, तिचें चिन्ह दिशेच्या धोरणानें बदलून त्या सर्वांची सचिन्ह मिळवणी करावी, म्हणजे उत्तर येईल.

मजपाशीं आज ३ हजारांचो इस्टेट आहे. माझे २ हजार लोकांकडे येणें आहेत, व मला १ हजार देणें आहेत, मिळून (किंवा एकंदरींत) मी आज ४ हजारांचा मालक आहें. असलीं वाक्यें आपल्या बोलण्यांत वारंवार येतात. त्यांमध्यें 'मिळून' किंवा 'एकंदरींत' ह्या शब्दांनें जी मिळवणी दर्शविली जाते तीच मिळवणी वरील सूचनेंत 'सचिन्ह मिळवणी' ह्या शब्दांनीं दर्शविली आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ट.

पुढील वजाबाक्या करा.

१. $\frac{११}{५} - \frac{८}{५}$; $\frac{१३}{२०} - \frac{७}{२०}$; $\frac{८}{१५} - \frac{९}{२०}$; $\frac{१}{२} - \frac{१}{३}$.

२. $३\frac{३}{४} - १\frac{१}{४}$; $३\frac{३}{४} - २\frac{५}{८}$; $५ - २\frac{६}{७}$; $१०\frac{३}{५} - \frac{११}{६०}$.

३. $१\frac{४}{२५} - \frac{३}{४}$; $९ - ३\frac{४}{२५}$; $९७\frac{१}{२} - ४८\frac{५}{६}$; $५\frac{३}{१४} - २\frac{१०}{२१}$.

४. $१३\frac{२}{७५} - ३\frac{३}{१५}$; $४\frac{१}{२१} - ३\frac{१}{१६}$; $२\frac{२}{९} - \frac{६१}{१२३}$; $२४\frac{१}{२४} - २१\frac{१}{२३}$

५. $१\frac{८}{२५} - \frac{४}{७}$; $१७\frac{१}{३५} - \frac{४}{२१}$; $४\frac{३}{५} - \frac{१}{४}$ चे $\frac{२}{३}$; $\frac{९}{१०} - \frac{१}{५}$ चे $\frac{६}{११}$.

६. $१\frac{२}{३}$ चे $२\frac{७}{९} - ३\frac{१७}{१८}$; $५\frac{१}{२}$ चे $४\frac{१}{२} - ३\frac{१}{४}$ चे $३\frac{१}{५}$.

पुढील वजाबाक्या शोध्याच्या पूर्णांकांतून भर घेण्याच्या युक्तीनें प्रथम करा, आणि मग शोध्यांत व शोधकांत समान हातचे मिळविण्याच्याही युक्तीनें करा.

७. $$\begin{array}{ccccccc} १२\frac{४}{७} & २५\frac{४}{९} & १८\frac{८}{२१} & ५\frac{४}{९} & २२\frac{३}{११} & १०\frac{२६}{३५} & ६\frac{८}{१७} \\ \underline{५\frac{६}{७}} & \underline{८\frac{७}{१५}} & \underline{१२\frac{१३}{२४}} & \underline{३\frac{१०}{१३}} & \underline{८\frac{११}{१५}} & \underline{८\frac{४०}{४१}} & \underline{३\frac{१७}{२०}}. \end{array}$$

अंकगणिताच्या पहिल्या भागांत 'पदावली व कंस' ह्या प्र-

करणांत दिलेल्या नियमांच्या आधारानें पुढच्या पदावलींतल्या बेरजा व वजाबाक्या करा.

८. $३\frac{१}{४} + ४\frac{३}{५} - ५\frac{१}{२} + १६\frac{५}{८} - ७\frac{११}{२४} + १० - १४\frac{५}{६}$.

९. $५\frac{१}{५} - २\frac{५}{६} - ३\frac{३}{१०} + \frac{१३}{२} - १६\frac{१}{४} + ३\frac{१}{१२} + ८\frac{१}{९}$.

१०. ५। − $२\frac{१}{३}$; $८\frac{२}{३}$ − ७८= ; ·॥= − $\frac{११}{४८}$.

११. ५॥ चे $\frac{२}{३} + \frac{५}{७}$ − २॥। चे $\frac{४}{५} + \frac{२}{७}$ − २।≈.

१२. $३\frac{१}{२} - २\frac{३}{४} + १\frac{३}{५}$ चे $\frac{२}{३}$ चे १०.

१३. $८\frac{३}{४} - ३\frac{१३}{१४} + २\frac{७}{९}$ चे $\frac{३}{१४}$ चे $४\frac{४}{५} - (५\frac{११}{१२} - २\frac{७}{८})$.

१४. $(\frac{११}{१२} - \frac{५}{६}) + (\frac{४}{५} - \frac{२}{३})$;
$(\frac{११}{१२} + \frac{५}{६}) - (\frac{४}{५} + \frac{२}{३})$; $\frac{११}{१२} + (\frac{५}{६} - \frac{४}{५}) + \frac{२}{३}$.

१५. $६\frac{७}{८}$ चे $२\frac{९}{११} - (६\frac{७}{८} - २\frac{७}{११})$;
$२\frac{२}{३}$ चे $\frac{११}{७५}$ चे $३\frac{३}{४} - \frac{११}{१२} + \frac{१५}{१६}$.

१६. $\dfrac{\frac{७}{८}\text{ चे }२\frac{१}{३}}{\frac{१}{८}\text{ चे }२\frac{१}{१२}}$ चे $\dfrac{\frac{५}{९}\text{ चा }१\frac{३}{४}}{\frac{७}{९}\text{ चा }१\frac{१}{४}} - \dfrac{३\frac{१}{३}\text{ चे }२\frac{१}{२}}{\frac{३}{५}\text{ चे }४\frac{१}{६}\text{ चे }३३\frac{१}{३}}$

पुढील प्रश्न पदावलीच्या रूपांत मांडून त्यांचीं उत्तरें काढा.

१७. $\frac{३}{१६}$, $\frac{५}{२४}$, $\frac{७}{३६}$ व $\frac{११}{५४}$ ह्यांपैकीं महत्तम व लघुतम अपूर्णांकांची बेरीज ही राहिलेल्या अपूर्णांकांच्या वजाबाकीपेक्षां किती मोठी आहे ?

१८. $\frac{७}{८}$, $\frac{९}{१०}$ व $\frac{२९}{१२}$ ह्यांच्या बेरजेंत कोणता लघुतम अपूर्णांक मिळवावा म्हणजे बेरीज पूर्णांक होईल ?

१९. $२५\frac{३}{४}$ व $१६\frac{९}{२५}$ ह्यांच्या बेरजेंत $१८\frac{७}{१०}$ व $५\frac{११}{१५}$ ह्यांचें अंतर वजा करा.

२०. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{१७}$ चे $६\frac{४}{५}$ हे $\frac{७}{८}$ चे $५\frac{३}{४}$ ह्यांतून वजा करा; आणि $\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{११}$ चे १०८९ हे $\frac{४}{७}$ चे $\frac{२}{१३}$ चे ४१४०॥ ह्यांतून वजा करा.

२१. $\frac{५}{१२}$, $१\frac{३}{८}$, $\frac{३}{१६}$ व $\frac{१४}{१३}$ ह्यांची बेरीज $४\frac{१}{४}$ ह्यांतून वजा करा.

२२. $३\frac{४}{७} + ९\frac{५}{९} - ५\frac{४}{५}$ ही संख्या $८\frac{७}{१६}$ चे $२\frac{७}{१९}$ ह्या संख्येपेक्षां केवढ्यानें लहान आहे ?

व्यवहारी अपूर्णांकांचा गुणाकार.

४२. गुणणें याचा अर्थ आवृत्तींची मिळवणी उत्पन्न करणें असा आहे, ह्मणजे गुण्याच्या गुणकाइतक्या आवृत्तींची बेरीज आणणें असा आहे. उदाहरणार्थ $\frac{२}{७}$ ना $\frac{३}{५}$ नीं गुणणें ह्याचा अर्थ $\frac{२}{७}$ च्या $\frac{३}{५}$ आवृत्तींची मिळवणी उत्पन्न करणें असा होतो. ह्यावरून $\frac{२}{७} \times \frac{३}{५}$ याचा अर्थ $\frac{२}{७}$ चे $\frac{३}{५}$ काढणें असा होतो. $\frac{२}{७}$ चे $\frac{३}{५}$ हें रूप प्रभागजाति अपूर्णांकाचें आहे. ह्यावरून दिलेल्या गुण्यगुणकांचा गुणाकार करणें याचा अर्थ ते गुण्यगुणक जो प्रभागजाति अपूर्णांक दाखवितात, त्याला भागजाति अपूर्णांकाचें रूप देणें असा होतो. ह्मणून ८ व्या प्रकारांत जी रीति दिली आहे तीच येथेंही घेतली पाहिजे.

उपपत्ति.—$\frac{२}{७}$ या गुण्याला गुणकाची ५ पट जे ३ ह्यांनीं गुणलें तर गुणाकार $\frac{६}{७}$ येतो. गुण्य कायम ठेवुन गुणक ५ पट घेतला तर गुणाकार ५ पट यावयाचा (अं. भा. १ क. १५८) अर्थात् $\frac{६}{७}$ ह्या ५ पट गुणाकाराला ५ नीं भागून $\frac{६}{३५}$ हा खरा गुणाकार येतो. ह्या कृत्यांत अंशांचा गुणाकार अंशस्थळीं व छेदांचा गुणाकार छेदस्थळीं आला आहे. ह्याच युक्तीनें हरएक गुणाकार यावयाचा. ह्मणून —

रीति.–अंशाअंशांचा गुणाकार करून तो अंशस्थानीं लिहावा व छेदाछेदांचा गुणाकार छेदस्थानीं लिहावा.

४३. **सूचना.**–उदाहरणांत भागानुबंध पूर्णांक किंवा नुसते पूर्णांक असल्यास त्यांचे विषम अपूर्णांक करावे; अंशछेदांस संक्षेप गेल्यास द्यावा, आणि मग गुणाकार करावा.

उ० १ लें $२\frac{३}{४} \times ३\frac{१}{२} \times १\frac{३}{५}$ चे $\frac{२}{३}$ चे १० हा गुणाकार करा.

रीतीप्र. $\frac{११}{४} \times \frac{७}{२} \times \frac{८}{५} \times \frac{२}{३} \times \frac{१०}{१} = \frac{११}{१} \times \frac{७}{१} \times \frac{२}{३} \times २$

$= \frac{३०८}{३} = १०२\frac{२}{३}$ हें उत्तर.

उ० २ रें. $७४\frac{२६}{२७} \times ४३ = \left(७५ - \frac{१}{२७}\right) \times ४३$

$= ७५ \times ४३ - \frac{४३}{२७} = ३२२३\frac{११}{२७}$ हें उत्तर.

उ० ३ रें. $७\frac{१३}{१४} \times ५\frac{४}{९} - (८\frac{२}{३} - ६\frac{३}{४}) \times २\frac{२}{५} + ३\frac{४}{५}$ चा $१\frac{१}{६}$

$$= \frac{१११}{१४} \times \frac{४९}{९} - (\frac{८}{३} - \frac{३}{४}) \times \frac{१२}{५} + \frac{१९}{५} \times \frac{७}{६}$$
$$= \frac{२५९}{६} - \frac{२३}{१२} \times \frac{१२}{५} + \frac{१३३}{३०}$$
$$= ४३\frac{१}{६} - ४\frac{३}{५} + ४\frac{१३}{३०}$$
$$= ४३ + \frac{५}{३०} - \frac{१८}{३०} + \frac{१३}{३०}$$
= ४३ हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ८.

पुढच्या संख्यांचे क्रमिक गुणाकार करा.

१. $\frac{५}{१२}$, $\frac{९}{१६}$ व $२\frac{२}{११}$; $९\frac{१}{१६}$, $\frac{३}{११}$ व $१\frac{७}{९}$; $२\frac{५}{११}$ व $२\frac{१}{५}$ व $\frac{३}{३६}$.

२. $\frac{११}{३५}$, $२\frac{१}{२}$ व १००; $१२\frac{१}{३}$, $३\frac{४}{५}$ व $१\frac{७}{३८}$; $६\frac{३}{४}$ चे $२\frac{८}{९}$ व २१.

३. $२\frac{१}{२}$ चे $३\frac{२}{३}$ व $४\frac{३}{४}$ चे $१\frac{१}{७}$; $२\frac{१}{५}$ व $१\frac{५}{६}$ चे $१\frac{२}{१३}$ चे $\frac{३}{४}$ चे $१\frac{५}{११}$.

४. $\frac{१}{२}$ चे $\frac{७}{१२}$ चे $\frac{३}{५}$ व $\frac{४}{११}$ चे $३\frac{१}{७}$; $१\frac{२}{८}$ चे $\frac{५}{६}$ व $\frac{५}{१८}$ चे $२\frac{१}{२२}$ चे ८.

पुढें मांडलेले क्रमिक गुणाकार करा.

५. $\frac{३}{७} \times १\frac{२}{५}$ चे $१२\frac{१}{२} \times २\frac{१}{५}$ चे $\frac{३}{४४}$; $\frac{२}{३}$ चे $१\frac{१}{७} \times २\frac{२}{५}$ चे $४\frac{३}{८}$ चे $२\frac{२}{९}$.

६. २॥ × ३ + $२\frac{२}{२}$; ३॥ × २। × १५८-; १८= × $१\frac{२}{३}$.

७. ५। चे $\frac{४}{५}$ × २॥; $३\frac{३}{४}$ चे २॥। × $\frac{१४}{५}$; $१३\frac{३}{४}$ चे $\frac{१४}{१५}$ − ५।=

८. ७॥= चे ६। चे $\frac{२}{३}$ + ३ चे $\frac{४}{५}$ − ७॥ चे $\frac{३}{४} \times \frac{११}{१५}$.

पुढील पदावली सोडवा.

९. $१\frac{३}{५} \times २\frac{४}{५} - (\frac{४}{५} - \frac{१}{४}) \times ३\frac{७}{११} - (\frac{४}{५} - \frac{३}{४}) \times ९\frac{३}{५}$.

१०. $\frac{३}{४} \times \frac{५}{७} + (\frac{३}{४} - \frac{१}{६}) \times ३\frac{३}{७} - (\frac{१}{५} + \frac{१}{७०}) \times$ २॥.

११. $(१९\frac{४}{५} - ३\frac{३}{४})(३\frac{४}{५} - २\frac{३}{७})$; $१९\frac{४}{५} - ३\frac{३}{४} \times ३\frac{४}{५} \times २\frac{३}{७}$; $१९\frac{४}{५} - ३\frac{३}{४} \times (३\frac{४}{५} - २\frac{३}{७})$.

१२. $६\frac{२}{३} \times ५\frac{३}{४} - ४\frac{४}{५} \times २\frac{५}{६} + १\frac{१७}{३०}$;
$६\frac{२}{३} \left(५\frac{३}{४} - ४\frac{४}{५} \right) \times २\frac{५}{६} + \frac{१९}{२०}$.

पुढच्या उदाहरणांतलीं कार्यें पदावलीरूपानें मांडून त्यांचीं उत्तरें काढा.

१३. $९९\frac{४२३}{४२४}$ ह्यांना ३२४ ह्यांनीं गुणा; $९९९\frac{४९४५}{४९४६}$ ह्यांना ९९९ ह्यांनीं गुणा; आणि ४७९ मध्यें $१\frac{९०४}{९०५}$ मिळवून त्या मिळवणीच्या ६ गुणिकांची मोजदाद काढा. (वर सोडविलेलें दुसरें उदाहरण पहा.)

१४. $४९\frac{१५}{१६}$ ह्यांना $५०\frac{१}{१६}$ नीं गुणून त्यांत $\frac{१}{२५६}$ मिळवा.

१५. $१\frac{१}{९}$ आणि $\frac{६}{७}$ चा $\frac{१}{२}$ ह्यांच्या बेरजेला $\frac{४}{११}$ आणि $\frac{१}{५}$ ह्यांच्या अंतराच्या पावणेदोन पटीनें गुणा.

१६. $११\frac{९}{१०}$ ह्यांतून $२\frac{१}{२}$, $३\frac{२}{३}$ व $४\frac{३}{४}$ ह्यांची बेरीज वजा करा; आणि त्या बाकीला $२\frac{१}{३}$ चे $\frac{५७}{६५}$ चे ६॥ ह्यांनीं गुणा.

१७. $३\frac{३}{४}$ व $४\frac{४}{५}$ ह्यांच्या बेरजेंत $४\frac{४}{५}$ व $५\frac{५}{६}$ ह्यांची वजाबाकी मिळवा, आणि त्या बेरजेला $११\frac{५}{११}$ ह्यांनीं गुणा.

व्यवहारी अपूर्णांकांचा भागाकार.

४४. भागाकार करण्याची कृति गुणाकाराच्या उलट आहे. ह्मणूनः—

रीति.—भाज्याला भाजकाच्या व्युत्क्रमानें गुणावें ह्मणजे इच्छिलेला भागाकार येईल.

उदाहरण. $\frac{३}{४}$ ह्यांस $\frac{५}{७}$ ह्यांनीं भागा.

$\frac{३}{४} \div \frac{५}{७} = \frac{३}{४} \times \frac{७}{५} = \frac{३ \times ७}{४ \times ५} = \frac{२१}{२०} = १\frac{१}{२०}$ हें उत्तर.

उपपत्ति.— $\frac{३}{४}$ ह्या भाज्याला $\frac{५}{७}$ ह्या भाजकाची ७ पट जे ५ त्यांनीं भागिलें, तर भागाकार $\frac{३}{२०}$ येतो. भाज्य कायम ठेवून भाजकाचे जितकी त्याची पट घेतली तर भागाकार तितकावा हिस्सा यावयाचा (अं० भा० १ क० १५८) ह्या प्रत्यक्षप्रमाणाअन्वयें वरील भागाकाराची ७ पट जे $\frac{२१}{२०}$ ते खरा भागाकार दाखवितील. $\frac{२१}{२०}$ हे भाजकाच्या व्युत्क्रमानें भाज्य गुणून येतात. ह्मणून वरील रीति खरी आहे.

४५. सूचना.—प्रभागजाति अपूर्णांक, भागानुबंध पूर्णांक, किंवा रेघांचे अपूर्णांक हे उदाहरणांत असल्यास, भागाकार करण्यापूर्वीं त्यांस भागजाति अपूर्णांकांचीं रूपें द्यावीं.

टीप—$४ \div ३ \times \frac{६}{७}$ आणि $४ \div ३$ चे $\frac{६}{७}$ ह्यांत फरक आहे,

तो असाः—$४ \div ३ \times \frac{६}{७} = \frac{४}{३} \times \frac{६}{७} = \frac{८}{७} = १\frac{१}{७}$.

व $४ \div ३$ चे $\frac{६}{७} = ४ \div \frac{१८}{७} = \frac{४}{१} \times \frac{७}{१८} = \frac{१४}{९} = १\frac{५}{९}$.

हा फरक लक्षांत ठेवावा.

उ० २ रें. $२\frac{२}{३} \div ३\frac{३}{४} = \frac{८}{३} \div \frac{१५}{४} = \frac{८}{३} \times \frac{४}{१५} = \frac{३२}{४५}$ हें उत्तर.

उ० ३ रें. $२\frac{२}{३}$ चे $३\frac{३}{४} \div ४\frac{१}{२}$ चे $\frac{५}{७}$ चे $\frac{४}{५}$.

आतां $२\frac{२}{३} \times ३\frac{३}{४} = १०$; $४\frac{१}{२} \times \frac{५}{७} \times \frac{४}{५} = \frac{२}{७}$.

$\therefore १० \div \frac{२}{७} = \frac{१०}{१} \times \frac{७}{२} = \frac{५}{१} \times \frac{७}{१} = \frac{३५}{१} = ३५$ हें उत्तर.

उ० ४ थें. $\frac{\frac{२}{५} \text{ चे } ५}{\frac{३}{५} \text{ चे } १\frac{४}{५}} = \frac{२}{\frac{२७}{२५}} = \frac{२}{१} \times \frac{२५}{२७} = \frac{५०}{२७} = १\frac{२३}{२७}$ हें उ०

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ड.

पुढें सांगितलेले भागाकार करा.

१. $२ \div \frac{२}{३}$; $\frac{२}{३} \div \frac{३}{४}$; $\frac{२}{३} \div \frac{३}{२}$; $२\frac{१}{१२} \div ३\frac{१}{३}$.

२. $१६\frac{२}{३} \div १२\frac{१}{२}$; $\frac{३२}{७५} \div \frac{८}{१५}$; $११\frac{२}{१५} \div \frac{३}{४}$.

३. $\frac{७}{९} \div १४$; $\frac{३}{५}$ चे $\frac{८}{९} \div \frac{६}{७}$ चे $\frac{३}{४}$; $\frac{३}{५}$ चे $\frac{८}{९} \div \frac{६}{७} \times \frac{३}{४}$.

४. $४\frac{१}{२}$ चे $\frac{५}{२७} \div ५\frac{३}{५}$ चे $१\frac{३}{७}$; $२०९ \div \frac{१}{५}$ चे २०.

५. $\frac{२}{७}$ चे $\frac{७}{८} \div \frac{३}{४}$ चे $\frac{१}{२}$ चे ५; $४\frac{१}{२}$ चा $\frac{१}{३} \div २\frac{१}{४}$ चे $६\frac{४}{१०}$.

पुढें मांडलेले भागाकार करा.

६. $\frac{५२}{३\frac{१}{४}}$; $\frac{३\frac{३}{४}}{५}$; $\frac{\frac{१४}{४५}}{१\frac{१७}{२५}}$; $\frac{\frac{११}{१२}}{७\frac{१७}{१८}}$.

७. $\frac{९\frac{७}{१५}}{२\frac{९}{२७}}$; $\frac{५\frac{३}{११}}{२\frac{७}{११}}$; $\frac{८\frac{३}{४}}{५\frac{५}{८}}$; $\frac{१५\frac{३}{५}}{७\frac{४}{५}}$.

पुढील उदाहरणांतील कृत्यें पदावलीचे रूपांनीं मांडून त्यांचीं उत्तरें काढा

८. $\frac{३२}{२\frac{२}{३}+\frac{२}{५}}$; $\frac{३\frac{१}{३}\text{ चा }१\frac{१}{५}}{१\frac{१}{५}\text{ चा }१\frac{१}{४}}$; $\frac{३\frac{३}{७}\text{ चे }२\frac{११}{१२}}{३\frac{१}{३}\text{ चे }८\frac{९}{१४}}$.

९. $\frac{२\frac{१}{२}+१\frac{२}{३}}{३\frac{२}{३}-२\frac{१}{२}}$; $\frac{४\frac{४}{१५}\text{ चे }२\frac{५}{८}}{५\frac{१}{५}-४\frac{१}{२}}$; $\frac{४॥\text{ चे }३\frac{१}{५}}{१२।-३८–}$.

पुढें मांडलेल्या पदावली सोडवा.

१०. $\left\{\left(१\frac{१}{४}+\frac{१}{५}\right)\text{ चे }\left(१\frac{१}{४}-\frac{१}{५}\right)\div\left(\frac{१}{४}+\frac{१}{५}\right)\text{ चे }\left(\frac{१}{४}-\frac{१}{५}\right)\right\}\div २\frac{१}{३}\text{ चे }२९$.

११. $\left\{\left(\frac{५}{४}+\frac{४}{५}\right)\left(\frac{५}{४}-\frac{४}{५}\right)\div\left(\frac{६}{५}+\frac{५}{६}\right)\text{ चे }\left(\frac{६}{५}-\frac{५}{६}\right)\right\}\div\frac{४१}{४४}\text{ चे }१\frac{३९}{६१}$.

पुढील उदाहरणांत प्रथम वरचें चिन्ह घेऊन एक उत्तर काढा, आणि नंतर खालचें चिन्ह घेऊन दुसरें उत्तर काढा.

$$१२.\ \left(\frac{\frac{५}{४}\pm\frac{४}{५}}{\frac{४}{३}\pm\frac{३}{४}}\div\frac{\frac{४}{५}\pm\frac{३}{४}}{\frac{४}{३}\pm\frac{५}{४}}\right)\div\left(\frac{\frac{६}{५}\pm\frac{१}{६}}{\frac{१}{४}\pm\frac{१}{५}}\div\frac{\frac{३}{१०}\pm\frac{१}{५}}{\frac{३}{४}\pm\frac{३}{५}}\right).$$

$$१३.\ \left\{\frac{१\frac{१}{३}\overset{\times}{\div}१\frac{१}{२}}{१\frac{१}{४}\overset{\times}{\div}१\frac{१}{५}}\div\frac{१\frac{१}{६}\overset{\times}{\div}१\frac{१}{७}}{१\frac{१}{८}\overset{\times}{\div}१\frac{१}{९}}\right\}\div\left\{\frac{\frac{१}{२}\overset{\times}{\div}\frac{१}{३}}{\frac{१}{४}\overset{\times}{\div}\frac{१}{५}}\div\frac{\frac{१}{६}\overset{\times}{\div}\frac{१}{७}}{\frac{१}{८}\overset{\times}{\div}\frac{१}{९}}\right\}.$$

पुढील उदाहरणांतील कृत्यें पदावलीनें मांडून त्यांचीं उत्तरें काढा.

१४. $\frac{१}{२}$, $१\frac{३}{७}$, आणि $\frac{५}{६}$, ह्यांचे बेरजेला $\frac{४}{१५}$, आणि $\frac{३}{२०}$, ह्यांचे वजाबाकीनें गुणून, त्या गुणाकाराला $\frac{११}{१८}$ चे $१\frac{१४}{१५}$ ह्यांनीं भागा.

१५. $\frac{१}{२१}$ चे $२\frac{१}{२}$, $\frac{१}{२४}$ चे $३\frac{१}{३}$, आणि $\frac{१}{२८}$ चे $४\frac{५}{२४}$, ह्यांतील लहानमोठ्या अपूर्णांकांच्या बेरजेला मधल्या अपूर्णांकानें भागा.

१६. $\frac{२}{३}$ चे $\frac{३}{७}$, ह्यांशीं $\frac{३}{७}$ चे $२\frac{१}{८}$ मिळवून त्या बेरजेला ($\frac{२}{३}$ चे $\frac{५}{६}$) ÷ ($\frac{५}{४}$ + $\frac{४}{५}$) ह्यानें गुणा.

१७. $२\frac{२}{३}$, $३\frac{३}{४}$ व $४\frac{५}{६}$ ह्यांच्या मिळवणीला $४\frac{४}{५}$ व $८\frac{८}{९}$ ह्यांच्या मिळवणीनें भागून, त्या भागाकारांत $१०\frac{९}{१०}$ व $५\frac{७}{८}$ ह्यांचें अंतर मिळवा.

१८. $\frac{५}{६}$ व $\frac{८}{९}$ ह्यांच्या मिळवणीला $७\frac{३}{४}$ ह्यांनीं भागून, तो भागाकार $३\frac{१}{४}$ चे $६\frac{१२}{१३}$ ह्यांत वजा करा.

१९. $२\frac{१}{२}$ व $३\frac{२}{३}$ ह्यांच्या बेरजेंत $४\frac{३}{४}$ व $५\frac{४}{५}$ ह्यांची वजाबाकी मिळवा, आणि त्या मिळवणीची $७\frac{६}{७} \div ६\frac{५}{६}$ इतकी पट करा.

वरील रीतींनीं मिश्र अपूर्णांक आणि पदावली सोडवितां येतात. जसेः—

उ० १ लें. $\dfrac{५\frac{५}{८}}{३\frac{३}{४}}$ आणि $\dfrac{८\frac{५}{६} - ४\frac{२}{३}}{३\frac{३}{४} + ७\frac{५}{१२}}$ हे मिश्र अपूर्णांक सोडवा.

पहिल्या अपूर्णांकाच्या अंशछेदांस ८ नीं गुणितां,

$$\frac{५\frac{५}{८}}{३\frac{३}{४}} = \frac{४५}{३०} = \frac{३}{२}.$$

दुसऱ्यांच्या अंशछेदांतील छेदांचा ल. सा. भा. १२ येतो त्यानें त्यांच्या अंशछेदांस गुणितां

$$\frac{८\frac{५}{६} - ४\frac{२}{३}}{३\frac{३}{४} + ७\frac{५}{१२}} = \frac{१०६ - ५६}{४५ + ८९} = \frac{५०}{१३४} = \frac{२५}{६७}.$$

वर्धित अपूर्णांक ह्याला अपूर्णांकाचे छेद सोडविण्याच्या क्रमानें सरळरूप देतां येते. आणि ह्या अपूर्णांकांतील संयुक्त भाजक कंसांनीं दाखवून ते कंस सोडविण्याच्या क्रमानेंही सरळरूप देतां येतें.

उ. २ रें. $५ + \dfrac{१}{३ + \dfrac{१}{५ + \frac{१}{७}}} = ५ + \dfrac{१}{३ + \dfrac{७}{३५ + १}} = ५ + \dfrac{१}{३ + \frac{७}{३६}}$

$= ५ + \dfrac{३६}{१०८ + ७} = ५\dfrac{३६}{११५}$ हें उत्तर.

उ. ३ रे. $\dfrac{३}{२+\dfrac{३}{४+\dfrac{५}{२+\frac{१}{३}}}} = ३ \div \left[२ + ३ \div \left\{४ + ५ \div \left(२ + \frac{१}{३}\right)\right\}\right]$

$= ३ \div \left[२ + ३ \div \left\{४ + ५ \div \frac{७}{३}\right\}\right]$

$= ३ \div \left[२ + ३ \div \left\{४ + \frac{१५}{७}\right\}\right]$

$= ३ \div \left[२ + ३ \div \frac{४३}{७}\right]$

$= ३ \div \left[२ + \frac{२१}{४३}\right]$

$= ३ \div \frac{१०७}{४३} = \frac{१२९}{१०७}$ हें उत्तर.

उ. ४ थें. $\dfrac{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}}{\frac{१}{२\frac{१}{२}}+\frac{१}{३\frac{१}{२}}+\frac{१}{४\frac{१}{२}}} = \dfrac{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}}{\frac{२}{५}+\frac{२}{७}+\frac{२}{९}} = \dfrac{\frac{६}{१२}+\frac{४}{१२}+\frac{३}{१२}}{\frac{१२६}{३१५}+\frac{९०}{३१५}+\frac{७०}{३१५}}$

$= \dfrac{\frac{१३}{१२}}{\frac{२८६}{३१५}} = \frac{१३}{१२} \times \frac{३१५}{२८६}$

$= \frac{१०५}{८८} = १\frac{१७}{८८}$ हें उत्तर.

उ. ५ वें. $\dfrac{२\frac{३}{४} + २\frac{१}{२}\text{ चे }\frac{७}{३\frac{४}{५}} - \frac{१\frac{२}{३}}{२\frac{१}{२}}}{१\frac{७७}{२२८}} = \dfrac{\frac{११}{४} + \frac{५}{२} \times \frac{३५}{१९} - \frac{१०}{१५}}{\frac{३०५}{२२८}}$

$= \left(\frac{११}{४} + \frac{१७५}{३८} - \frac{२}{३}\right) \times \frac{२२८}{३०५}$

$= \frac{६२७ + १०५० - १५२}{२२८} \times \frac{२२८}{३०५}$

$= \frac{१५२५}{३०५} = ५$ हें उत्तर.

उ. ६ वें. $\dfrac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३}\text{ चे }\frac{१}{४} + \frac{५}{६}}{\frac{१}{१३}\text{ चे }\left(१ + ५\frac{१}{२}\right) + \frac{५}{६}\text{ चे }\frac{१}{२३}\left(७ - २\frac{२}{५}\right) - \frac{१}{३}}$

$= \dfrac{\frac{१}{२} + \frac{१}{१२} + \frac{५}{६}}{\frac{१}{१३} \times ६\frac{१}{२} + \frac{५}{६} \times \frac{१}{२३} \times ४\frac{३}{५} - \frac{१}{३}}$

$= \dfrac{\frac{६ + १ + १०}{१२}}{\frac{१}{१३}\times\frac{१३}{२} + \frac{५}{६}\times\frac{१}{२३}\times\frac{२३}{५} - \frac{१}{३}} = \dfrac{\frac{१७}{१२}}{\frac{१}{२} + \frac{१}{६} - \frac{१}{३}}$

$= \dfrac{\frac{१७}{१२}}{\frac{२}{६}} = \frac{१७}{१२} \times \frac{३}{१} = ४\frac{१}{४}$ हें उत्तर.

उ० ७ वें. $१७\frac{५}{१२}$ ह्यांतून $९\frac{३}{४}$ आणि $४\frac{५}{७}$ यांचें अंतर वजा करा आणि त्या बाकीला $\frac{५}{९}$ व $९\frac{२}{७}$ ह्यांच्या गुणाकारानें भागून उत्तर काढा.

$$\text{इष्ट भागाकार} = \frac{१७\frac{५}{१२}-(९\frac{३}{४}-४\frac{५}{७})}{\frac{५}{९}\times ९\frac{२}{७}} = \frac{१७\frac{५}{१२}-९\frac{३}{४}+४\frac{५}{७}}{\frac{५}{९}\times\frac{६५}{७}}$$

$$= \frac{१२+\frac{३५}{८४}-\frac{६३}{८४}+\frac{६०}{८४}}{\frac{३२५}{६३}} = १२\frac{३२}{८४}\times\frac{६३}{३२५}$$

$$= १२\frac{८}{२१}\times\frac{६३}{३२५} = \frac{\overset{४}{\cancel{२६०}}}{\cancel{२१}}\times\frac{\overset{३}{\cancel{६३}}}{\underset{५}{\cancel{३२५}}}$$

$$= \frac{१२}{५} = २\frac{२}{५} \text{ हें उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ढ.

पुढें दिलेले मिश्र अपूर्णांक व पदावली सोडवा.

१. $\frac{३\frac{३}{५}}{६}$; $\frac{१८}{५\frac{१}{७}}$; $\frac{२\frac{५}{६}}{३\frac{८}{९}}$; $\frac{९\frac{५}{१४}}{१३\frac{८}{२१}}$; $\frac{\frac{३}{४}\text{ चे }\frac{८}{९}}{५\frac{७}{१२}}$; $\frac{\frac{२}{३}\times\frac{५}{६}}{८\frac{७}{१५}}$;
$\frac{५\frac{४}{९}}{१\frac{५}{६}+७\frac{८}{१५}}$; $\frac{२\frac{२}{३}\text{ चे }३\frac{३}{४}}{२\frac{२}{३}+३\frac{३}{४}}$.

२. $\frac{\frac{४}{७}+\frac{३}{११}}{१-\frac{४}{७}\text{ चे }\frac{३}{११}}$; $\frac{\frac{१२०}{१११}-\frac{१}{२३१}}{१+\frac{१}{२३१}\times\frac{१२०}{१११}}$; $\frac{\frac{२}{३}\text{ चे }\frac{४}{५}+\frac{४}{५}\text{ चे }\frac{६}{७}}{\frac{४}{५}\text{ चे }\frac{६}{७}-\frac{१}{३}\text{ चे }\frac{२}{५}}$;
$\frac{\frac{२}{३}+\frac{४}{५}\text{ चे }\frac{५}{९}-\frac{८}{२१}}{१+\frac{२}{३}\times\frac{५}{७}-\frac{५}{९}}$.

३. $\frac{२\frac{४}{११}}{२\frac{३}{५}}\div\frac{२\frac{७}{११}}{८\frac{७}{१०}}$; $\frac{१८}{\frac{३}{४}\text{ चे }४\frac{२}{७}}\div १७\frac{१}{२}$;
$\frac{७\frac{३}{४}-३\frac{११}{१२}}{१८\frac{१}{२}\div\frac{६}{७}}$; $१\frac{३}{४}$ चे $\frac{४\frac{५}{९}}{६\frac{१}{६}}$ चे $\frac{६\frac{८}{११}}{११\frac{५}{७}}$.

४. $\frac{१+२\times\frac{४}{३}+\frac{४}{३}\text{ चे }\frac{४}{३}}{\frac{४}{३}\times\frac{४}{३}-१}$; $\frac{३\frac{२}{३}\times ३\frac{२}{३}-२\frac{१}{४}\times २\frac{१}{४}}{३\frac{२}{३}-२\frac{१}{४}}$;
$\frac{१+६\frac{७}{८}\times(१+६\frac{७}{८})}{१+५\frac{४}{५}\times(१+५\frac{४}{५})}$; $\frac{४\frac{१}{३}\times ४\frac{१}{३}\times ४\frac{१}{३}-१}{४\frac{१}{३}\times ४\frac{१}{३}-१}$.

५. $\dfrac{३\frac{४}{५} + १२\frac{५}{६} - ३\frac{७}{८}}{७\frac{५}{९} - ४\frac{२}{३} \text{ चे } \dfrac{५}{५\frac{३}{५}}}$; $\dfrac{७\frac{१}{७} - ३\frac{१}{८}}{६ + ४\frac{३}{४}} \div \dfrac{५\frac{१}{३} + १\frac{१}{७}}{६\frac{१}{७} - २\frac{१}{३}}$;

$\dfrac{११\frac{३}{४} - १०\frac{१}{२}}{११\frac{३}{४} + १०\frac{१}{२}} \div \dfrac{१०\frac{३}{८} + ११\frac{१}{८}}{१०\frac{३}{८} - ९\frac{१}{८}} \times \dfrac{\frac{२}{७} + \frac{३}{११}}{\frac{२}{७} - \frac{३}{११}}$.

६. $\dfrac{३}{१ + \dfrac{२}{५ + \frac{७}{९}}}$; $\frac{१}{१३}$ चे $\dfrac{१}{१ + \dfrac{\frac{१}{३}}{३ + \frac{१}{४}}}$

$२\frac{१}{२} \times \dfrac{१}{३\frac{१}{३} + \dfrac{१}{४\frac{१}{४}}}$; $\dfrac{\frac{५}{७} - \frac{१}{३} \times \left(\frac{१}{२} + \frac{१}{७}\right)}{१ + \dfrac{१}{२ - \frac{१}{४}}}$

७. $\dfrac{३ + \frac{५}{३} \text{ चे } \dfrac{२१}{७\frac{३}{५}} - \dfrac{१}{४} - \dfrac{१\frac{२}{३}}{२\frac{१}{२}}}{१० - \frac{१५१}{२२८} \text{ चे } ५}$;

$\dfrac{५\frac{१}{३} + ४\frac{३}{४}}{३\frac{५}{६} + २\frac{७}{८}} \times \dfrac{५\frac{१}{३} - ४\frac{३}{४}}{३\frac{५}{६} - २\frac{७}{८}} \div \dfrac{२८\frac{४}{९} - २२\frac{९}{१६}}{१४\frac{२५}{३६} - ८\frac{१७}{६४}}$.

८. $\dfrac{\frac{२}{११} + \frac{३}{११} + \frac{८}{७७} - \frac{१}{५}}{\frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६}}$ चे

$\dfrac{\dfrac{४}{१\frac{१}{७}} \text{ चे } \dfrac{३}{१\frac{१}{९}} - \dfrac{४}{३\frac{१}{३}} \text{ चे } \dfrac{२\frac{१}{२}}{१\frac{१}{३}}}{\frac{३}{२०९} \text{ चे } \frac{११}{७} \text{ चे } ३\frac{१}{२} + २\frac{१}{५५} \text{ चे } १\frac{५}{६} \text{ चे } \frac{१}{११}}$.

९. $\dfrac{\frac{१}{९} \text{ चे } १\frac{१}{४} \text{ चे } ४\frac{१}{२}}{\frac{५}{५६} \text{ चे } १\frac{१}{३} \text{ चे } ३\frac{१}{२}} - \dfrac{३\frac{१}{४} + ४\frac{१}{३}}{६\frac{१}{२} + १\frac{१}{१२}}$;

$\dfrac{१४\frac{१}{४} - ६\frac{१}{२}}{३\frac{१}{३} + ६\frac{१३}{१५}} \div \dfrac{४\frac{१}{१२} + ६\frac{१}{८}}{९\frac{१}{५} - ३\frac{१}{४}} + \left(३०\frac{७}{१८} - २२\frac{८}{९}\right)$.

१०. $\dfrac{\frac{३}{५}}{\frac{८}{९}} + \dfrac{\frac{५}{८}}{२\frac{१}{२} \times १\frac{१}{३}} \times \frac{१}{८०}$; $\dfrac{१}{३\frac{१}{५}} - \dfrac{२\frac{१}{४}}{९} + \dfrac{३\frac{५}{८}}{२} - \dfrac{\frac{४}{७}}{४\frac{४}{७}}$;

$\dfrac{२\frac{१}{२}}{३\frac{१}{४}} + \dfrac{१\frac{१}{२} - \frac{५}{६}}{१\frac{१}{४} + \frac{५}{६}} - १\frac{२}{३९}$.

११. $\frac{३}{८}$ चे $\frac{१३}{१६} - \dfrac{१\frac{२}{७}}{६\frac{२}{३}}$ चे $\frac{१९}{२०} + \frac{३}{७}$ चे $\dfrac{६\frac{५}{१२}}{३\frac{२}{३}}$;

$\frac{२}{३}$ चे $\left(\frac{२}{३} \text{ चे } \dfrac{२\frac{१}{४} + १\frac{१}{२}}{३\frac{१}{२} - १} + \frac{१}{२}\right)$.

१२. $\left(३\frac{७}{११} \div ४\frac{२}{७}\right)$ चे $\left(१०\frac{५}{७} \div ७\frac{१}{२}\right)$ चे $\frac{७७}{५४०}$;
$३\frac{७}{११} \div \left(४\frac{२}{७} \div १०\frac{५}{७}\right) \div \left(७\frac{१}{२} \div \frac{७७}{५४०}\right)$.

१३. $\dfrac{५\frac{३}{४} \div २\frac{१}{२}}{२\frac{२}{५} \text{ चे } ७\frac{२}{३} \div \frac{४}{५}} + २\frac{१}{१२} - \frac{२}{३}$ चे $\frac{१३}{२०}$;

$$२ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{५ + \frac{१}{७}}}\,;\quad \cfrac{३}{८ - \cfrac{७}{२ - \frac{३}{४}}} + \cfrac{५}{६ - \cfrac{५}{२ - \frac{५}{१६}}}$$

१४. $$२\frac{३}{४} + \cfrac{४}{५ + \cfrac{६}{७ + \frac{८}{९}}}\,;\quad ३\frac{४}{५} + \cfrac{५\frac{५}{१६}}{७\frac{७}{८} + \cfrac{८\frac{९}{१०}}{१०\frac{११}{१२} + \cfrac{१३}{९\frac{३}{४}}}}\,;$$

$$६\frac{७}{८} + \cfrac{३\frac{३}{४}}{\cfrac{२}{३\frac{१}{२} + \cfrac{३}{४\frac{४}{५}}}}.$$

१५. $$\dfrac{\cfrac{१}{१ - \cfrac{१}{२ - \frac{१}{२}}} + \frac{१}{३} + \left(१ + \frac{१}{२}\right)}{३\left(१ + \cfrac{२}{३\frac{१}{२}} - ४\right)}\,;$$

$$१\frac{१}{४} \times १२\frac{१}{५} \text{ चे } \frac{३}{८} - \dfrac{६\frac{१}{४} + ७\frac{१५}{१६}}{१२ - ६\frac{२}{३}} - \dfrac{४ + \cfrac{१}{४ + \cfrac{१}{४ - \frac{१}{४}}}}{४}.$$

१६. $$\dfrac{८\frac{७}{८} - ७\frac{६}{७} + ५\frac{५}{१६} - ४\frac{४}{५}}{९\frac{९}{१०} - ८\frac{१३}{१५} + ७\frac{७}{८} - ६\frac{६}{७}}\,;\quad १\frac{२१}{४३}.\ \frac{३७७०५}{७५००८}.$$

१७. $\dfrac{५-\dfrac{१}{५-\dfrac{१}{५}}}{३-\dfrac{१}{३-\dfrac{१}{३}}} \cdot \frac{९}{२३}$ चे ७; $\dfrac{६+\dfrac{१}{६-\dfrac{१}{६}}}{४-\dfrac{१}{४-\dfrac{१}{४}}} \cdot १०\frac{८}{९}$.

१८. $\dfrac{८\frac{३}{५} - ७\frac{३}{४} + ५\frac{२}{३} - ४\frac{१}{२}}{१३ - ११\frac{९}{१०} + १०\frac{७}{९} - ९\frac{१७}{२०}} \cdot \frac{२}{११}$ चे ३६५.

१९. $\dfrac{\frac{१}{३१}\cdot ५\frac{१७}{२३}\cdot ६\frac{३}{११} + ६\frac{१९}{५१}\cdot १\frac{२३}{४०} \div २\frac{५}{१७} + १\frac{१०}{४९}}{९\frac{१६}{५७}\cdot १\frac{२२}{२३} \div ५\frac{१७}{२८} + ३\frac{११}{७८}\cdot ६\frac{१७}{२१} \div ७\frac{२१}{३२}}$ चे $१२\frac{४}{९}$.

२०. $\dfrac{\frac{१}{२३} \text{ चे } ६\frac{१३}{१७} \text{ चे } २४\frac{११}{१३} - ४\frac{१३}{१८} \times ३\frac{३३}{३४} \div ३\frac{३७}{९६}}{८\frac{१७}{१९} \times ५\frac{१४}{३९} \div ४\frac{१८}{३२} - ७\frac{१९}{२०} \times ५\frac{११}{६५} \div १४\frac{२१}{२५}} \cdot ४\frac{८}{२३}$.

२१. $\dfrac{१}{२+\dfrac{३}{४+\frac{५}{६}}} \cdot \frac{४८६२}{४१४७} \div \left(१\frac{१}{२} - \frac{२३}{३०}\right)$.

२२. $\dfrac{१९}{७\times\dfrac{२}{३ - १\frac{२}{३}}} \cdot \frac{७७३५}{६७१८४} \div \left(१\frac{३}{१६} - \frac{४७}{४८}\right)$.

२३. $\dfrac{\dfrac{७}{४-\frac{५}{६}} - \dfrac{५}{६-\frac{३}{८}}}{\dfrac{४}{७-\frac{४}{७}} + \dfrac{२}{४-\frac{२}{५}}} \cdot \dfrac{\dfrac{१}{\frac{१}{२}-\frac{२७}{५१}} - १३}{१९ - \dfrac{१}{\frac{१}{२}-\frac{६}{३१}}}$.

२४. $\dfrac{\dfrac{२}{३-\frac{४}{५}} + \dfrac{३}{४-\frac{५}{६}}}{\dfrac{३}{२-\frac{१}{४}} - \dfrac{१}{३-\frac{४}{५}}} \cdot \dfrac{\dfrac{१}{\frac{२}{३}-\frac{२}{९}} - \dfrac{१}{१\frac{१}{२}-\frac{१९}{२२}}}{\dfrac{१}{१\frac{१}{७}-\frac{१}{८}} - \dfrac{२}{६\frac{३}{५}-२\frac{५}{११}}}$

व्यवहारी अपूर्णांकांचा रूपभेद किंवा विविधाशीं संबंध.

४६. ह्याच्यासंबंधानें व्यवहारांत नानाप्रकारचे प्रश्न येत असतात, त्यांचा समावेश ज्यांत करितां येतो ते प्रकार येणंप्रमाणें.–

प्रकार १ ला.—एकंच्या किमतीवरून अपूर्णांकाची हलक्या परिमाणांत किंमत काढण्याचा आणि भागानुबंध पूर्णांकाला हलक्या परिमाणाचें रूप देण्याचा.

रीति.—अपूर्णांक किंवा भागानुबंध पूर्णांक ह्यांतील एकंच्या जागीं त्याच्या बरोबरीची हलक्या परिमाणाची संख्या ठेवावी. ह्या संख्येला अंशानें गुणून छेदानें भागलें ह्मणजे त्या अपूर्णांकाची त्या परिमाणांत किंमत येईल, व ह्या संख्येला पूर्णांकानें-ही गुणून त्यांत ती किंमत मिळविली ह्मणजे ह्या एकंदर संख्येला त्या हलक्या परिमाणाचें रूप येईल.

उदाहरण १ लें.–एका रुपयाचे $\frac{२}{३}$ ह्यांचे पावले करा.

एक रुपयाचे ४ पावले ह्मणून,

$\frac{२}{३}$ रु. = $\frac{२}{३}$ × ४ पा. = $\frac{८}{३}$ पा. = २$\frac{२}{३}$ पा. हें उत्तर.

उदाहरण २ रें.–एका खंडीचे $\frac{३}{५}$ ह्यांस पायलींचें (बारोळी) रूप द्या.

१ खं. = २० मण, व १ म. = १२ पा. ह्मणून,

$\frac{३}{५}$ खं. = $\frac{३}{५}$ × २० म. = $\frac{६०}{५}$ म. = $\frac{६०}{५}$ × १२ पा.

= $\frac{७२०}{५}$ पा. = १४४ पा. हें उत्तर.

४७. सूचना.—दिलेले अपूर्णांकाची किंमत काढा असें ह्मटलें असेल तेव्हां अपूर्णांकास हलके परिमाणांत नेतांना भागानुबंध पूर्णांक उत्पन्न करावा, नंतर त्यांतील पूर्णांक तसेच ठेवून अपूर्णांकांस मात्र आणखी खालचे परिमाणांत न्यावें; याप्रमाणें शेवटपर्यंत करावें.

उदाहरण ३ रें.–एका रुपयाचे $\frac{३}{५}$ ची हलके परिमाणांत किंमत काढा.

१ रु. = ४ पा., १ पा. = ४ आ., व १ आ. = १२ पै ह्मणून.

$\frac{३}{५}$ रु. = $\frac{३}{५}$ × ४ पा. = $\frac{१२}{५}$ पा. = २$\frac{२}{५}$ पा.

यांतील २ पावले तसेच ठेवून राहिलेले

$\frac{२}{५}$ पा. = $\frac{२}{५}$ × ४ आ. = $\frac{८}{५}$ आ. = १$\frac{३}{५}$ आ.

यांतील एक आणा तसाच ठेवून राहिलेले

$\frac{3}{5}$ आ. = $\frac{3}{5}$ × १२ पै = $\frac{३६}{५}$ पै = ७$\frac{1}{5}$ पै

∴ $\frac{3}{5}$ रु. = २ पा. १ आ. ७$\frac{1}{5}$ पै हें उत्तर.

रीति दुसरी—विविधाची.

	रु.	पा.	आ.	पै.
	१	०	०	०
×	३			
५)	३	०	०	०
	०	२	१	७$\frac{1}{5}$ हें उत्तर.

रीति तिसरी—रेघांचे अपूर्णांकांची.

१ रु.
× ३
५) ३

·॥–॥ बाकी ०॥· हें उत्तर.

उदाहरण ४ थें.–४ खंडींचे $\frac{2}{3}$ यांस वारुळे मापानें हलके परिमाणांत आणा.

४ खं. चे $\frac{2}{3}$ = $\frac{8}{3}$ खं. = २$\frac{2}{3}$ खं.

पुनः $\frac{2}{3}$ खं. = $\frac{2}{3}$ × २० म. = $\frac{४०}{३}$ म. = १३$\frac{1}{3}$ मण.

पुनः $\frac{1}{3}$ म. = $\frac{1}{3}$ × १२ पा. = $\frac{१२}{३}$ पा. = ४ पायली.

उत्तर. २ खं. १३ म. ४ पा.

रीति दुसरी – विविधाची.

	खं.	म.	पा.
	४	०	०
×	२		
३)	८	०	०
	२	१३	४ हें उत्तर.

रीति तिसरी—रेषांचे अपूर्णांकांची.

	४	खं.
×	२	
३)	८	खं.
	२॥३।१	खं. हें उत्तर.

उदाहरण ५ वें.—३ खं. ४ म. यांचे $\frac{३}{४}$ यांची हलके परिमाणांत किंमत काढा.

३ खं. ४ म. यांचे $\frac{३}{४}$ = ३ $\frac{४}{२०}$ खं. चे $\frac{३}{४}$

= ३$\frac{१}{५}$ खं. चे $\frac{३}{४}$ = $\frac{१६}{५}$ खं. चे $\frac{३}{४}$

$\frac{१६}{५}$ खं. चे $\frac{३}{४}$ = $\frac{४८}{२०}$ खं. = २$\frac{२}{५}$ खं.

पुनः $\frac{२}{५}$ खं. = $\frac{२}{५}$ × २० म. = $\frac{४०}{५}$ म. = ८ म.

∴ उत्तर २ खं. ८ म.

दुसरी रीति.

	खं.	म.
	३	४
×		३
४)	९	१२
	२	८ हें उत्तर.

तिसरी रीति.

	खं.	३।४
×		३
४)	९॥२	
	२।३	खं. हें उत्तर.

उदाहरण ६ वें.—$\frac{३}{११}$ ह्यांना दशांश, शतांश, इ० स्थलपरिमाणाचें रूप ४ स्थळांपावेतों दें.

१ एकं = १० दशांश; १ दशांश = १० शतांश;

१ शतांश = १० सहस्रांश. ह्मणून,

$\frac{३}{११}$ एकं = $\frac{३}{११}$ × १० दशांश = $\frac{३०}{११}$ दशांस.

= २$\frac{८}{११}$ दशांश.

पुनः $\frac{८}{११}$ दशांश = $\frac{८}{११}$ × १० शतांश = $\frac{८०}{११}$ शतांश.

= ७$\frac{३}{११}$ शतांश.

पुनः $\frac{३}{११}$ शतांश = $\frac{३}{११}$ × १० सहस्रांश = २$\frac{८}{११}$ सहस्रांश

∴ उत्तर $\frac{३}{११}$ = २ दशांश ७ शतांश २ सहस्रांश ७$\frac{३}{११}$ दशसहस्रांश.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ग.

१. ७ खंडींचे $\frac{३}{५}$ ह्यांची किंमत काढा.

२. १० गुंठे १२ आणे यांचे $\frac{२}{३}$ काय दाखवितील ?

३. एका दिवसाचे $\frac{३}{४}$ चे $\frac{३}{४}$ चे $\frac{३}{४}$ यांस हलके परिमाणांत न्या.

४. ५ रु. १२ आ. यांचे $\frac{७}{१५}$ ह्यांची किंमत काय ?

५. एका पौंडाच्या अष्टमांशाच्या सात पटीची किंमत काय ?

६. एका गिनीचे $\frac{३}{४}$ आणि एका क्रौनाचे $\frac{३}{८}$ यांची बेरीज व वजाबाकी काढा.

७. एका मैलाचे $\frac{७}{१०}$, एका फर्लांगाचे $\frac{५}{८}$, आणि एका पोलाचे $\frac{४}{११}$, यांची बेरीज सांगा.

८. १।।।· रु. चे $\frac{२}{३}$, आणि ·।।~ चे $\frac{५}{८}$, यांची वजाबाकी काय होईल ?

९. $\frac{९}{१११}$ घ. यार्ड, आणि २$\frac{७}{८}$ घ. फूट, यांच्या बेरजेंत घन इंच किती ?

१०. $\dfrac{\frac{१}{१२}}{\frac{४}{५} \text{ चे } १\frac{१}{३}}$ हा १६ दि. २ अ. २२ मि. यांचा अपूर्णांक आहे. याची हलके परिमाणांत किंमत काढा.

११. ३ खं. ७ म. ही संख्या कोणत्या संख्येच्या $\frac{५}{६}$ बरोबर आहे ?

पुढील अपूर्णांकाच्या पूर्णांकांत किमती काढा.

१२. $\frac{१३५५}{१७९२२}$ टन; $\frac{७}{११}$ एकर; १ फर्लांगाचें ५$\frac{७१}{८८}$; १ मैलाचे $\frac{६०}{१०५६६}$.

१३. $\frac{१७}{२५}$ दिवस; $\frac{३९}{१६५}$ एकर; १ हं. वे. चे २$\frac{१३}{१६}$ चे $\frac{४}{१५}$; २$\frac{४७}{१५०}$ एल.

१४. ३६५ दिवसांचे $\dfrac{३\frac{१३}{१५}}{१२\frac{१५}{१७}}$; $\dfrac{\frac{१\frac{३}{१४}}{४}}{२०}$ टन;

$\dfrac{६\frac{११\frac{१३}{६०}}{१२}}{१४}$ आठवडे.

१५. १$\frac{४}{३२}$ ग्या. चे $\dfrac{१}{१+\dfrac{१}{९+\frac{३}{४}}}$; $\dfrac{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}}{\dfrac{१}{२\frac{१}{२}}+\dfrac{१}{३\frac{१}{२}}+\dfrac{१}{४\frac{१}{२}}}$ पर्चंचे $\frac{४}{७}$.

पुढील पदावलींच्या पूर्णांकांत किमती काढा.

१६. ७$\frac{७}{८}$ पौं. + ७$\frac{७}{१६}$ शि. + ६$\frac{३}{४}$ पे.; ३$\frac{५}{८}$ पौं. + ७$\frac{४}{५}$ शि. + ४$\frac{३}{४}$ पे.

१७. $\frac{४}{७}$ हं. वे. + ८$\frac{५}{६}$ पौं. + ३$\frac{९}{१०}$ औं.; १ टनाचे $\frac{३}{५}$ + १ हं. वे. चे $\frac{५}{८}$ + १ पौं. चे $\frac{२}{३}$.

१८. ३$\frac{७}{११}$ मैल − ७$\frac{७}{१६}$ फ. + ३५$\frac{२९}{३३}$ पो.; $\frac{५}{३२}$ चौ. मै. + $\frac{७}{१०}$ एकर + $\frac{५}{८}$ रूड.

१९. आठवड्याचे $\frac{३}{५}$ + दिवसाचे $\frac{३}{४}$ + तासाचे $\frac{५}{७}$ + मिनिटाचे $\frac{२}{३}$.

४८. प्रकार २ रा. एकं मानिलेल्या संख्येच्या कोणत्या अपूर्णांकानें (किती कितव्या हिश्शांनीं) तसलीच दिलेली संख्या दाखवितां येईल तें शोधण्याचा.

उदाहरणार्थ ८ च्या कोणत्या अपूर्णांकानें ५ दाखविले जातात ? हा प्रश्न विचारांत घ्या. अपूर्णांकाचे लक्षणाप्रमाणें पाहतां ८ चे $\frac{५}{८}$ = ५ येतात. ह्यावरून $\frac{५}{८}$ हें ह्याचें उत्तर होतें. तसेंच १ रुपयाचे $\frac{१८}{१९२}$ = १ आ. ६ पै येतात ह्यावरून १ रुपयाचा कोणता अपूर्णांक १ आणा ६ पै दाखवितो ? ह्या प्रश्नाचें उत्तर $\frac{१८}{१९२}$ हें होतें. आजमितीस १ शिलिंगाची किंमत सुमारें ११ आणे झाल्यामुळें १ पौंडाची किंमत सुमारें १३ रु. १२ आ. होते. ह्यावरून १३ रु. १२ आ ह्या किमतीच्या नाण्याचा कोणता अपूर्णांक १ रुपया दाखवितो ? या प्रश्नाचें उत्तर $\frac{१६}{२२०}$ हें होतें.

ह्यावरून लक्षांत येईल कीं, विविधांत ज्याला चढती भांजणी ह्मणतात, किंवा हलक्या परिमाणाच्या संख्येला भारी परिमाणाचें रूप देणें ह्मणतात, तोच हा प्रकार आहे. वरील प्रश्नाचे

अर्थ दुसऱ्याही रीतींनीं सांगतां येतात, ते असे. ५ मध्यें अष्टे (आठाचा समुदाय) किती राहतील तें अपूर्णांकांत सांगा. १आ. ६ पै. ह्यांना अपूर्णांकांत रुपयाचें रूप द्या. १३ रु. १२ आ. किमतीचें १ नाणें ह्मटलें, तर त्या नाण्याचे किती कितवे हिस्से १ रुपयांत राहतील ?

ह्या प्रश्नांचा उद्देश पाहिला तर दिलेल्या एकंचे संख्येमध्यें मानलेल्या एकंची संख्या केवढी राहील तें शोधावें किंवा मोजावें हा असतो ह्मणून,

रीति १ ली –दिलेल्या एकंचे जागीं मानलेल्या एकंच्या नांवाची त्याची किंमत ठेवावी. अथवा

रीति २ री.–दोन्ही संख्यांच्या एका परिमाणांत किमती काढाव्या, आणि दिलेल्या संख्येच्या किमतीला मानलेल्या एकंच्या किमतीनें भागावें. ह्मणजे मानिलेल्या एकंची मोजदात येईल.

उदा १ लें. ५ पयांना आण्याचें रूप द्या.

$$१ \text{ पै} = \frac{१}{१२} \text{ आणा ह्मणून}$$

$$५ \text{ पया} = ५ \times \frac{१}{१२} \text{ आ.} = \frac{५}{१२} \text{ आ. हें उत्तर.}$$

उदा. २ रें. ३ आणे २ पै यांस रुपयाचें रूप द्या.

$$३ \text{ आ. } २ \text{ पै} = ३\frac{१}{६} \text{ आ.} = \frac{१९}{६} \text{ आ.}$$

$$= \frac{१९}{६} \times \frac{१}{१६} \text{ रु.} = \frac{१९}{९६} \text{ रु. हें उत्तर.}$$

उदा. ३ रें. $६\frac{३}{५}$ दिवस यांस वर्षाचें रूप द्या.

$$३६५\frac{१}{४} \text{ दि.} = \frac{१४६१}{४} \text{ दि.} = १ \text{ वर्ष.}$$

व

$$६\frac{३}{५} \text{ दि.} = \frac{३३}{५} \text{ दि.}$$

$$\text{ह्मणून } ६\frac{३}{५} \text{ दि. चीं वर्षे} = \frac{\frac{३३}{५} \text{ दि.}}{\frac{१४६१}{४} \text{ दि.}} = \frac{३३}{५} \times \frac{४}{१४६१} \text{ व}$$

$$= \frac{११}{५} \times \frac{४}{४८७} \text{ व.} = \frac{४४}{२४३५} \text{ व. हें उत्तर.}$$

उदा. ४ थें. ११५॥ आणे आणि २५। पावले यांची बेरीज व बजाबाकी यांस रुपयांचीं रूपें द्या.

२५।· पा. = १०१ आ.

म्हणून	बेरीज.	वजाबाकी.
	११५॥· आ.	११५॥· आ.
	१०१ आ.	१०१ आ.
	२१६॥· आ.	१४॥· आ.

व २१६॥· आ. = $\frac{२१६॥}{१६}$ रु. = १३$\frac{१७}{३२}$ रु बेरीज.

तसेंच १४॥· आ. = $\frac{१४॥}{१६}$ रु. = $\frac{२९}{३२}$ रु. वजाबाकी.

उदा. ५ वें. एक गुंज ही ४॥ तोळ्यांचा कितवा अंश आहे ?

१ गुं. = $\frac{१}{९६}$ तोळा.

$\therefore \quad \frac{\text{१ गुं.}}{\text{४॥· तो.}} = \frac{\frac{१}{९६}\text{ तो.}}{\frac{९}{२}\text{ तो.}} = \frac{१}{\cancel{९६}_{४८}} \times \frac{\cancel{२}^{१}}{९} = \frac{१}{४३२}$ हें उत्तर.

उदा. ६ वें. ४ मण १४ शेर ह्यांचे $\frac{२}{३}$ हे १ खंडी ८ मण ह्यांचे (सुमारें १ टनाचे) अंश त्या रूपानें मांडा.

री. २ प्र. इष्ट अपूर्णांक $= \frac{\text{४ म. १४ शे. ह्यांचे }\frac{२}{३}}{\text{१ खं. ८ मण.}} = \frac{४\frac{१४}{४०}\text{ मणाचे }\frac{२}{३}}{\frac{२८}{१}\text{ मण.}}$

$= \frac{\frac{\cancel{८७}^{२९}}{\cancel{२०}_{१०}}\text{ म. चे }\frac{\cancel{२}}{\cancel{३}}}{\frac{२८}{१}\text{ मण.}} = \frac{\frac{२९}{१०}\text{ म.}}{\frac{२८}{१}\text{ मण}} = \frac{२९}{२८०}.$

येथें १ खं. ८ म. ह्यांचे $\frac{२९}{२८०}$ = ४ म. १४ शे. ह्यांचे $\frac{२}{३}$ आहेत.

$\therefore$ $\frac{२९}{२८०}$ हा इच्छिलेला अपूर्णांक हें उत्तर.

उदा. ७ वें. ३ गिनींच्या $\frac{६}{७}$ च्या $\frac{२}{३}$ चा कोणता भागजाति १५ शि. ९ पे. ह्यांच्या $\frac{८}{९}$ चे $\frac{३}{४}$ दाखवील ?

इष्टभागजाति $= \frac{\text{१५}\frac{३}{४}\text{ शि. चे }\frac{८}{९}\text{ चे }\frac{३}{४}}{\text{६३ शि. चे }\frac{६}{७}\text{ चे }\frac{२}{३}}$

$= \frac{\cancel{६३}^{१}}{\cancel{४}_{१}} \times \frac{\cancel{८}^{१}}{\cancel{९}_{१}} \times \frac{\cancel{३}^{१}}{४} \times \frac{१}{\cancel{६३}} \times \frac{७}{६} \times \frac{\cancel{३}^{१}}{\cancel{२}_{१}} = \frac{७}{२४}.$

उदा. ८ वें. ३ टन १६ हं. वे. ३ क्वा. २२$\frac{२}{५}$ पौंड चे (५$\frac{८}{९}$ − ३$\frac{१}{४}$) ह्यांचा कोणता अपूर्णांक ५ हं. वे. ३ क्वा. ३$\frac{१}{२}$ पौंड चे $\frac{३\frac{३}{४}}{३\frac{१७}{१९}}$ चे ७$\frac{३}{५}$ दाखवील?

७६ हं. वे. ३ क्वा. २२$\frac{२}{५}$ पौंड.	५ हं. वे. ३ क्वा. ३$\frac{१}{२}$ पौंड.
४	४
३०७ क्वा.	२३ क्वा.
२८	२८
८६१८$\frac{२}{५}$ पौंड.	६४७$\frac{१}{२}$ पौंड.

∴ इष्ट अपूर्णांक $= \dfrac{६४७\frac{१}{२} \text{ पौं. चे } \frac{३\frac{३}{४}}{३\frac{१७}{१९}} \text{ चे } ७\frac{३}{५}}{८६१८\frac{२}{५} \text{ पौं. चे } (५\frac{८}{९} - ३\frac{१}{४})}$

$= \dfrac{\frac{१२९५}{२} \times \frac{१५}{४} \times \frac{१९}{७४} \times \frac{३८}{५}}{\frac{४३०९२}{५} \times (२\frac{८}{९} - \frac{१}{४})}$

$= \frac{१२९५}{२} \times \frac{१५}{४} \times \frac{१९}{७४} \times \frac{३८}{५} \times \frac{५}{४३०९२} \times \frac{३६}{९५}$

$= \frac{५}{२४}$ हें उत्तर.

उदा. ९ वें. २ पौं. १० औं. अवार्डुपाइजचा कोणता अपूर्णांक १ पौं. ८ औं. त्राय ह्यांशीं मिळविला, तर बेरीज ३ पौंड ७ औं. १० पेनिवेट येईल?

३ पौं.	७ औं.	१० पे. वे.	ह्यावरून २ पौं. १० औं. अवार्डु. चा कोणता अपूर्णांक १ पौं. ११ औं. १० पे. वे.
१ पौं.	८ औं.	० पे. वे.	
१ पौं.	११ औं.	१० पे. वे.	

देईल तें येथें शोधणें आहे.

आतां ११ औं. १० पे. वे. = ११ औं. त्रा $= \frac{११\frac{१}{२}}{१२}$ पौं. त्रा.

$= \frac{२३}{२४}$ पौं. त्रा.

∴ १ पौं. ११ औं. १० पे. वे = १$\frac{२३}{२४}$ पौं. त्रा. = १$\frac{२३}{२४}$ × ५७६० ग्रेन

आणि २ पौं. १० औं. आवार्डु = २$\frac{१०}{१६}$ पौं. आवार्डु. = २$\frac{५}{८}$ × ७००० ग्रे.

∴ इष्ट अपूर्णांक $= \dfrac{१\frac{२३}{२४} \times ५७६० \text{ ग्रे.}}{२\frac{५}{८} \times ७००० \text{ ग्रे.}} = \frac{४७}{२४} \times \frac{८}{२१} \times \frac{५७६०}{७०००} = \frac{२२५६}{३६७५}$.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. त.

१. $१\frac{१}{२}$ पौंड हा $२\frac{२}{३}$ गिनींचा कितवा अंश आहे ?

२. एका मैलाचे $\frac{३}{१६८०}$ हे एका यार्डाचे कोणते अंश होतील ?

√३. अर्ध्या क्रौनाचे $\frac{१}{२}$ चे $\frac{९}{१०}$ हे ९ पौंडांचा कोणता अपूर्णांक होतील ?

४. एका मणाचे $\frac{३}{७}$ यांची ५७। पट जर एका खंडींत वजा केली तर बाकी काय राहील ?

५. ४. औं. १५ पे. वे. १५ ग्रेन ह्यांना त्रायपौंडांचें रूप अपूर्णांकांत द्या, आणि मग अवार्डुपाईज पौंडांचेंही रूप अपूर्णांकांत द्या.

६. १५ हं. वे. ३ का. १७ पौं. ८ औं. ह्यांना हंड्रेडवेटांचें व टनांचें अशीं दोन अपूर्णांक रूपें द्या.

७. ५ बुशेल ३ पेक १ ग्यालन ह्यांना कार्टरांचें रूप द्या.

८. ३ का. २७ पौं. ९ औं. $१२\frac{४}{९}$ ड्राम ह्यांना हंड्रेडवेटांचें अपूर्णांक रूप द्या.

९. ३ फर्लांग २९ पोल ४ यार्ड १ फूट ९ इंच ह्यांना एका मैलाचें अपूर्णांक रूप द्या.

१०. ४ पौं. १ औं. ८ पे. वे. १५ ग्रे. ह्यांचे किती कितवे अंश हे १ पौं. १ औं. ९ पे. वे. १५ ग्रे दाखवितील ?

√११. २॥ यार्डांचें माप घेतलें तर २॥ फुटांची मोजदात काय येईल ?

१२. मोजणीचें माप ५ इंचांचें असलें तर $३\frac{५}{६४}$ मैलाची मोजदात काय येईल ?

१३. २ एकर ३७ पो. ह्यांचा कोणता अपूर्णांक ३ एकर २ रूड १ पोल हें दाखवील ?

४९. प्रकार ३ रा. एका देशांतील परिमाणास दुसऱ्या देशांतील परिमाणांत नेण्याचा.

रीति.—सांगितलेले परिमाणाचे जातीपैकीं जें परिमाण इच्छिलेले परिमाणाचे जातीच्याशीं ताडलेलें असेल त्या परिमाणांत पहिल्यानें दिलेल्या परिमाणाचें रूपांतर करावें. नंतर त्यास इच्छिलेल्या जातीच्या ताडलेल्या परिमाणांत न्यावें. नंतर त्या संख्येचें इच्छिलेले परिमाणांत रूपांतर करावें.

एका देशांतील परिमाणास दुसऱ्या देशांतील परिमाणांत नेणें झालें, तर त्यास ताडलेले परिमाणांचे वाटेनेंच न्यावें लागेल हें स्पष्ट आहे.

उ. १ लें. १४ रु. १२ आ. ह्यांस इंग्लिश चलनी पौंड शिलिंग यांत न्या.

$$१ \text{ रु.} = \frac{१}{१०} \text{ पौंड.}$$

$$\therefore \quad १४ \text{ रु. } १२ \text{ आ.} = १४\frac{३}{४} \text{ रु.} = \frac{५९}{४} \text{ रु.}$$

$$= \frac{५९}{४} \times \frac{१}{१०} \text{ पौं.} = १\frac{१९}{४०} \text{ पौं.}$$

$$= १ \text{ पौं. } ९ \text{ शि. } ६ \text{ पे. हें उत्तर.}$$

उ. २ रें. ५ तो. ३ मा. २ गुंजा इतक्या वजनाचा एक सोन्याचा दागिना आहे. तर त्याचें इंग्लिश मानाप्रमाणें काय वजन होईल ?

$$१ \text{ तोळा} = १८८ \text{ ट्राय ग्रेन.}$$

$$५ \text{ तो. } ३ \text{ मा. } २ \text{ गुं.} = ५\frac{१३}{४८} \text{ तो.}$$

$$= \frac{२४५}{४८} \text{ तो.}$$

$$= \frac{२४५ \times १८८}{४८} \text{ ट्रा. ग्रे.}$$

$$= \frac{२४५ \times ४७}{१२} \text{ ट्रा. ग्रे.}$$

$$= ९६० \frac{११}{१२} \text{ ट्रा. ग्रे.}$$

$$= २ \text{ औं. } १ \text{ पे. } ६\frac{११}{१२} \text{ ग्रे. हें उत्तर.}$$

उ. ३ रें. २ दि. ४ अ. १२ मि. ह्यांत १ दि. १५ घ. १२ प. वजा करून बाकीला दिवसांचें रूप द्या.

१ अवर = २॥ घटिका.

ह्मणून २ दि. ४ अ. १२ मि. = २ दि. १० घ. ३० प.

	दि.	घ.	प.
यांत वजा	१	१५	१२
बाकी	०	५५	१८

∴ ५५ घ. १८ प. = ५५$\frac{९}{३०}$ घ. = ५५$\frac{९}{३०}$ × $\frac{१}{६०}$ दि.

= $\frac{१६५९}{१८००}$ दि.

= $\frac{५५३}{६००}$ दि. हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. थ.

१. एका हौदांत दरतासास ४९० ग्यालन पाणी येतें, तर एका दिवसाचे $\frac{७}{८}$ इतक्या वेळांत त्या हौदांत किती हांडे पाणी येईल तें सांगा. (१ हांडा = ७ ग्यालन.)

२. १२० सिक्किनच्या मोहरा करा.

३. २२० ग्यालनांचे $\frac{४}{५}$ चे फरे करा.

४. १२॥२॥ खंडी धान्याचे बुशेल किती होतील? (४ पुण्याच्या पायली = ५ ग्या.)

५. एक लक्ष फ्रेंचमिटर,* हे एका कोसाचे किती पट होतील ?

६. एका विघ्याचे $\frac{१०}{१७}$ ह्यांस एकराचें रूप द्या.

७. बारुळे मापाच्या खं. १५८३ यांचा $\frac{१}{३}$, व सोळुले मापाच्या खं. ५८२, यांची वजाबाकी सोळुले मापांत सांगा.

५०. प्रकार ४ था.—अपूर्णांकाच्या किंमतीपासून तो ज्या एकंचा अपूर्णांक आहे तो एकं काढण्याचा.

उ. १ लें. ज्या संख्येचे $\frac{५}{७}$ = ३० येतात, ती संख्या कोणती ?

५ एकंचा ७ वा हिस्सा = ३० आहेत, तर ५ एकं = ३० सत्तें २१० येतील. तसेंच ५ एकं = २१० आहेत, तर एकं = $\frac{२१०}{५}$ = ४२ येतील. हे सरळ रूपभेद पुढील पद्धतीनें मांडतात.

$\frac{५}{७}$ एकं = ३०

∴ ५ एकं = ३० × ७ = २१०

∴ एकं = $\frac{२१०}{५}$ = ४२ हें उत्तर.

---

* १ फ्रेंचमीटर = ३९·३७ इंच.

रीति.—अपूर्णांकाच्या किंमतीला त्याच्या छेदानें गुणून अंशानें भागावें, ह्मणजे त्याचा एकं येईल.

उदाहरण २ रें. अशी संख्या सांगा कीं तिचे $\frac{१०}{१७}$ घेतले तर ५ शिलिंग ६ पेन्स येतील.

पद्धतीनें.	विधिश्रानें.
$\frac{१०}{१७}$ एकं = ५ शि. ६ पे.	५ शि. ६ पे.
∴ १० एकं = ९३ शि. ६ पे.	१७
∴ एकं = ९ शि. ४$\frac{१}{५}$ पे. उत्तर.	१०)९३ शि. ६ पे.
	९ शि. ४$\frac{१}{५}$ पे. उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ८.

१. कोणत्या कालाच्या $\frac{५}{९}$ नीं ३ ता. २० मि. दाखवितां येतील? कोणत्या कालाच्या $\frac{६}{७}$ नीं ३ दिवस दाखविले जातील?

२. कोणत्या रकमेचे $\frac{१४}{१७}$ = ३ शि. ६ पे. आहेत? कोणत्या रकमेचे $\frac{५}{९}$ = ७ पौं. १२ शि. ६ पे. आहेत?

३. अशा संख्या सांगा कीं एकीचे $\frac{१५}{१७}$ = २५ यार्ड यावे, आणि दुसरीचे $\frac{३१}{१०८}$ = ७ फूट यावे.

४. २ औंस ३ पेनिवेट हे कोणत्या वजनाचे तीन-सत्रांश आहेत?

५. १७ पौं. २ औं. हे $\frac{१३}{१५}$ नीं दाखविण्याला एकं केवढा पाहिजे? १५$\frac{१}{३}$ हंड्रेडवेट हे $\frac{९}{१०}$ नीं दाखविण्याला एकं केवढा घ्यावा?

६. १७ हे ज्याचे $\frac{१५}{२३}$ आहेत असा एकं सांगा. तसेंच ५$\frac{१}{५}$ हे ज्याचे $\frac{३५}{३४}$ आहेत असा एकं सांगा.

७. ५ पौं. १२ शि. ६ पे. हे $\frac{३}{८}$ होण्याला पूर्ण किंवा एकं केवढा पाहिजे?

८. एका जमिनींत १७ जणांचे सारखे वांटे आहेत. त्यांतील ५ वांट्यांची जमीन २ रूड २० पर्च भरली, तर एकंदर जमीन केवढी भरेल?

९. केवढ्या काळाचे $\frac{५}{३४}$ हे २$\frac{१}{२}$ चांद्रमास होतील?

दशांश अपूर्णांक.

५१. स्थलसंकेत— २२२ = २०० + २० + २ ह्यावरून पूर्णांक संख्येंत अंक जसजसा उजवेकडे मांडला जातो तसतशी त्याची किंमत १० वा हिस्सा होते ह्मणजे, पूर्णांकांतलें प्रत्येक स्थलपरिमाण हें त्यांच्या डावीकडच्या स्थलपरिमाणाचा १० वा हिस्सा असतें. (अं. भा. १ क. १२) ह्याच संकेतानें एकंच्या माथ्याशीं* दशांशचिन्ह नांवाचा बिंदु किंवा अळें (आलय) करून त्यापुढें अंक मांडित गेलें, तर त्या अंकांनीं पूर्णांकाच्याच पद्धतीनें दशांश संख्या दाखविल्या जातील. उदाहरणार्थ, ३४५·६७८९१ किंवा ३४५'६७८९१ ह्या संख्येंत ५ हे एकं दाखवितील, त्यांपुढचे ६ हे दशांश दाखवितील, त्यांपुढचे ७ हे शतांश दाखवितील, त्यांपुढचे ८ हे सहस्रांश दाखवितील, अशा रीतीनें, पूर्णांक व दशांश ह्या दोन्ही भागांतील अंकांची किंमत त्यांच्या स्थळांनीं दाखविली जाईल. आतां ह्या संकेताप्रमाणें पूर्णांकांतील एकं हा पूर्ण व अपूर्ण ह्या दोन्ही जातींच्या परिमाणांना साधारण असल्यामुळें ह्याच्या डावीकडचा १ ला अंक दशक दाखवितो. तसाच दशांशचिन्हाच्या उजवीकडचा १ ला अंक दशांश (दहावा हिस्सा) दाखवितो. एकंच्या डावीकडचा २ रा अंक शतक दाखवितो. तसाच दशांशचिन्हाच्या उजवीकडचा २ रा अंक शतांश दाखवितो. ह्याप्रमाणें जशी एकंच्या डावीकडचीं परिमाणें दसपटीनें मोठीं होत जातात, तशींच दशांशचिन्हाच्या उजवीकडचीं परिमाणें १०व्या हिश्शानें लहान होत जातात, ह्मणून ह्या परिमाणांना **दशकपरिमाणें** व **दशांशपरिमाणें** अशीं नांवें देतात. येथें १०, १००, १००० इ. अंक हे १० चा १, २, ३ इ. घात दाखवितात. ह्यावरून दशांशाचें लक्षण ठरतें तें असें:—

५२. **दशांश अपूर्णांक**—ज्या संख्यांना १०, १००, १०००

---

* दोन संख्यांचा गुणाकार दाखविणें असला, तर तो ५·६ असाही केव्हां लिहितात. ह्या गुणनबिंदूहून दशांशबिंदु वेगळा दर्शविण्यासाठीं, दशांशबिंदु हा माथ्याशीं देतात, आणि गुणनबिंदु हा मध्यभागीं देतात.

इत्यादि १० चे घात छेद असून, ते दशांशचिन्हापुढच्या स्थलांनीं दाखविले असतात, त्यांना दशांश किंवा दशांशअपूर्णांक ह्मणतात.

उदाहरणार्थ, ३४५·६७८९१ ह्या संख्येंतील दशांशचिन्हापुढचे अंक पहा. हे अंक $\frac{६}{१०}$, $\frac{७}{१००}$, $\frac{८}{१०००}$ इ० अपूर्णांक दाखवीत असून ह्या अपूर्णांकांचे छेद दशांशचिन्हापुढच्या १ ल्या, २ र्‍या, ३ र्‍या, इ० स्थळांनीं दाखविले आहेत म्हणून हे दशांश अपूर्णांक होत.

५३. वाचन—दशांशांची संख्या स्थलपरिमाणांच्या नांवांनीं वाचतात, अथवा एकंचें स्थान दशांशचिन्हानें दर्शवून नुसतीही वाचतातः—जशीः—३४५ पूर्णांक ६ दशांश ७ शतांश ८ सहस्रांश ९ दशसहस्रांश व १ लक्षांश. अथवा ३४५, दशांश-चिन्ह, सहा, सात, आठ, नऊ, व एक अथवा ३४५ पूर्णांक ६७ हजार ८ शें ९१ लक्षांश.

दशांशबिंदूपुढें जितक्याव्या स्थलीं अंक असेल तितक्यावा १० चा घात हा त्याला छेद असतो, व तो त्या बिंदूपुढच्या प्रत्येक अंकाच्या स्थलानें दाखविला जातो. ह्यावरून दशांशांक हे पूर्णांकांप्रमाणेंच स्थलपरिमाणें दाखवितात हें लक्षांत येईल.

वरील प्रकारच्या दशांश अपूर्णांकांच्या रांगा ह्या पूर्णांकांच्याच पद्धतीनें उत्पन्न होतात, यास्तव पूर्णांकांसंबंधी एकंदर नियम ह्या रांगांना लागू असले पाहिजेत.

पूर्णसंख्येंतील वेगळाले अंक वेगळालीं स्थलपरिमाणें दाखवितात, पण ते अंक जुळून वाचिले म्हणजे ती संख्या त्या रांगेंतील लघुतम परिमाणें दाखवितें. जशी—२४ ह्या अंकपंक्तीची वाचणी चो-वीस ही २४ एकं दाखवितें. हा नियम दशांशांतील अंकांनाही लागला पाहिजे. म्हणून.—

५४. नियम १ ला—पूर्णांकयुक्त दशांश हे पूर्ण (एकं) आणि लघुतम अंश ह्या दोन नांवांनीं जुळून वाचले, तर त्यांच्या बराबरीचा भागानुबंध पूर्णांक दाखवितात; आणि हे लघुतम अंशांच्याच नांवानें जुळून वाचले, तर त्यांच्या बराबरीचा विषम अपूर्णांक दाखवितात.

पडताळा. $२४·३७५ = २४ + \frac{३}{१०} + \frac{७}{१००} + \frac{५}{१०००}$
$= २४ + \frac{३००}{१०००} + \frac{७०}{१०००} + \frac{५}{१०००}$
$= २४\frac{३७५}{१०००} = \frac{२४३७५}{१०००}$.

आतां बेरजांच्या संख्या ३७५ व २४३७५ ह्यांना १० चा ३ घात हा छेद असून तो मूळच्या संख्येंत दशांशचिन्हापुढच्या ३ स्थलांनीं दाखविला जातो, यास्तव ·३७५ व २४·३७५ ह्या संख्यांनाही वरील लक्षणाप्रमाणें दशांश अपूर्णांक म्हटलें पाहिजे हें उघड आहे. म्हणून २४·३७५ ही संख्या चोवीस पूर्णांक तीनशें पंचाहत्तर सहस्रांश अशी भागानुबंध पूर्णांकाप्रमाणेंही वाचतात, आणि चोवीस हजार तीनशें पंचाहत्तर सहस्रांश अशी विषम अपूर्णांकाप्रमाणेंही वाचतात.

ह्यावरून लक्षांत येईल कीं, दशांश अपूर्णांकाच्या रांगेचे समच्छेद करून तिला भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप देणें, व दशांशांतील भागानुबंध पूर्णांकाला विषम अपूर्णांकाचें रूप देणें, हीं कामें दशांशांत प्रत्यक्ष करावीं लागत नाहींत, नुसत्या वाचणीनेंच दर्शवितां येतात. ही ह्या अपूर्णांकांमध्यें मोठी सोईची गोष्ट आहे.

५५. **लेखन.**—दशांशसंख्येंत कांहीं स्थलीं अंक नसले अगर एकं नसले, तर त्या स्थलीं शून्यें मांडतात. उदाहरणार्थ, ०·००३०४०२ ही संख्या पहा.

पूर्णांक दशांशरूपांत मांडणें झालें, तर त्यांचे माथीं दशांशचिन्ह करून दशांशस्थलीं शून्यें मांडतात. उदाहरणार्थ ३४५·००० ही संख्या पहा.

व्यवहारी अपूर्णांकाला १० चा घात छेद असून, तो अपूर्णांक दशांशांत मांडणें असला, तर तो छेद १० चा जो घात असेल (म्हणजे त्यांत १ वर जितकीं शून्यें असतील) तितके अंशावरचे अंक मोजून त्यांच्या डावीकडे दशांशचिन्ह करितात. अंशांत तितके अंक नसले, तर त्यांच्या मागें शून्यें देऊन अंक पुरे करतात, आणि त्यांच्या डावीकडे दशांशचिन्ह करितात. जसें:—

$\frac{३४७}{१००} = ३·४७$; $\frac{१३}{१०००} = ०·०१३$.
$\frac{२१२५}{१०००} = २·१२५$; $\frac{३७}{१००००} = ०·००३७$;

ह्यावरून दशांश अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांकांत मांडणें झाला, तर,

रीति.—दशांशसंख्या ही दशांशचिन्हावांचून अंशस्थलीं मांडावी, आणि दशांशस्थलांइतका १० चा घात (दशांश स्थलांइतकीं एकावर शून्यें देऊन तो) तिला छेद मांडावा.

उदाहरणें.

१. २·०३ = $२\frac{३}{१००}$ अथवा $\frac{२०३}{१००}$.

२. ·३७९ = $\frac{३}{१०}+\frac{७}{१००}+\frac{९}{१०००}=\frac{३००+७०+९}{१०००}=\frac{३७९}{१०००}$.

३. ४२·०३७ = $४२\frac{३७}{१०००}$ अथवा $\frac{४२०३७}{१०००}$.

४. ·००२९ = $\frac{२९}{१००००}$.

५. १५·००१ = $१५\frac{१}{१०००}$ अथवा $\frac{१५००१}{१०००}$.

६. १३·७५ = $१३\frac{७५}{१००}$ = $१३\frac{३}{४}$ अथवा १३।।।.

७. २३·०६२५ = $२३\frac{६२५}{१००००}$ = $२३\frac{१}{१६}$ = २३०—.

पूर्ण संख्येला १० नीं गुणणें असलें तर त्या संख्येवर आपण एक शून्य देऊन त्या संख्येंतलें एकंचें स्थान एक स्थळ उजवेकडे सारतों. तसेंच पूर्ण संख्येला १० नीं भागणें असलें तर आपण त्या संख्येवरचें एक शून्य कापून त्या संख्येंतलें एकंचें स्थान एक स्थळ डावेकडे सारतों. दशांशांचीं परिमाणेंही एकं किंवा दशांशबिंदु ह्यांवर अवलंबून असतात. म्हणून,

५६. **नियम २ रा.**—दशांश संख्येला १०, १००, १०००, इत्यादि १० च्या घातानें गुणणें असलें, तर तींतील दशांशचिन्ह त्या घाताइतकीं स्थलें उजवेकडे सारावें, आणि भागणें असलें तर तींतील दशांशचिन्ह त्या घाताइतकीं स्थलें डावीकडे सारावें.

उ. १ लें. २·४६८ × १०० = २४६·८.

कारण दशांशचिन्ह २ स्थलें पुढें नेल्यानें ८ सहस्रांशांची १०० पट होऊन ते दशांश झाले, ६ शतांशांची १०० पट होऊन ते एकं झाले. ४ दशांशांची १०० पट होऊन ते दशक झाले, आणि २ एकंची १०० पट होऊन ते शतं झाले. ह्याप्रमाणें प्रत्येक परिमाण

१०० पट झाल्यानें प्रत्येक अंकाची १०० पट झाली, म्हणून एकंदर संख्येची १०० पट झाली हें उघड आहे. परिमाणांच्या दसपटीचा संबंध दर एक दशांशांत असावयाचा म्हणून हा नियम कोणत्याही दशांशसंख्येला लागू झाला पाहिजे.

उ. २ रें. २·४६८ ÷ १००० = ·००२४६८.

कारण दशांशचिन्ह तीन स्थळें मागें सारल्यानें २ एकं होते ते सहस्रांश झाले, ४ दशांश होते ते दशसहस्रांश झाले, ६ शतांश होते ते लक्षांश झाले; आणि ८ सहस्रांश होते ते दशलक्षांश झाले. ह्याप्रमाणें प्रत्येक अंकाच्या परिमाणाचा सहस्रांश झाल्यानें त्या प्रत्येक अंकाचा सहस्रांश झाला, म्हणून ह्या एकंदर संख्येचा सहस्रांश झाला हें उघड आहे. परिमाणांच्या दसपटीचा संबंध हरएक दशांशांत असावयाचा, म्हणून हाही नियम कोणत्याही दशांशसंख्येला लागू झाला पाहिजे.

उ. ३ रें. २४·६८ × १००० = २४६८०.

उ. ४ थें. २४·६८ ÷ १००० = ·०२४६८.

पूर्ण संख्येच्या डावीकडे शून्यें घेतल्यानें तींतील अंकांच्या परिमाणांत बदल होत नाहीं, म्हणून त्या संख्येची किंमत बदलत नाहीं. ह्यावरून,

५७. नियम ३ रा.—दशांशसंख्येचे पुढें कितीही शून्यें मांडिलीं तरी त्या संख्येची किंमत बदलत नाहीं.

उ. $·२५ = \frac{२५}{१००} = \frac{२५०}{१०००} = ·२५०$.

कारण दशांशावर शून्य दिलें असतां त्या अंशाची दसपट होते. पण त्याच शून्यानें त्या दशांशाचें स्थळही वाढलें जाऊन त्याच्या छेदाचीही दसपट होते, त्यामुळें किंमत बदलत नाहीं. म्हणून ज्या संख्यांत दशांशस्थळें कमी असतील त्यांचे उजवे बाजूस शून्यें देऊन सर्वांचीं दशांशस्थळें सारखीं केलीं म्हणजे सर्वांचे समच्छेद होतात. जसें—·२५ व, ·५ यांचीं समच्छेदरूपें ·२५ व ·५० हीं आहेत.

दशांश अपूर्णांकाचे उजवे बाजूस कितीही शून्यें दिलीं तर

त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाहीं, परंतु जर डावीकडे शून्यें दिलीं, तर त्यास १०, १००, १०००, इ० ह्यांनीं भागल्याप्रमाणें होतें हे नियम पुढच्या उदाहरणांत तपासून पहावे.

$\cdot ३ = \frac{३}{१०}$.	त्याचप्रमाणें	$\cdot ०३ = \frac{३}{१००}$.
$\cdot ३० = \frac{३०}{१००} = \frac{३}{१०}$.		$\cdot ००३ = \frac{३}{१०००}$.
$\cdot ३०० = \frac{३००}{१०००} = \frac{३}{१०}$.		$\cdot ०००३ = \frac{३}{१००००}$.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ५.

पुढील संख्या दशांशांत मांडा.

१. तीन आणि पांच दशांश; चार आणि सात शतांश व तीन दशांश; सहा आणि आठ शतांश व चार दशांश; सहा दशांश; चौदा शतांश; एकशें पस्तीस सहस्रांश; चार शतांश; पांच लक्षांश.

२. अठावीस पूर्णांक पंचवीसशें सत्यायशी दशसहस्रांश; पन्नास पूर्णांक, चार हजार सहा दशसहस्रांश; सातशें नऊ कोट्यंश; आठ लक्ष सहाशें दहा अब्जांश; चार हजार सहाशें आठ दशलक्षांश.

३. आठ हजार चारशें तीन शतांश; चार कोटी सत्तेचाळीसशें पंधरा सहस्रांश; अठावीसशें चार दशांश; सात हजार चार शतांश; नव्वदशें आठ सहस्रांश.

४. चार, सात, दशांश टिंब, आठ, पांच, एक व चार; सहा, द. चि. शून्य, चार आठ शून्य शून्य, पांच व दोन;

पुढील दशांश प्रथम संख्यांच्या रांगांनीं वाचा, नंतर भागानुबंध पूर्णांकाप्रमाणें वाचा, नंतर विषम अपूर्णांकाप्रमाणें वाचा.

५. ५·३७; ·००२५; ·५६७८९; ·००२४०५.

६. ९·८७६५४३२१; ३५·००००४५६७६५.

पुढील गुणाकार व भागाकार द. चि. मागें किंवा पुढें सारून मांडा.

७. ८·००३०५६ ह्यांस १०० नीं, १००० नीं, आणि १०००० ह्यांनीं गुणा.

८. ·०१७२८ ह्यांस १० नीं व १००० नीं गुणा, आणि ·००५२३६ ह्यांस १०००००००० नीं गुणा.

९. ७३·५६ ह्यांना १० नीं व १००० नीं भागा व ३·७१६५ ह्यांना १०० नीं व १०००० नीं भागा.

१०. ५७३२४ ह्यांना १०००० ह्यांनीं, १ ला १०० नीं आणि ·००१ ह्याला १००० नीं भागा.

पुढील दशांश अपूर्णांक व्यवहारी अपूर्णांकांच्या रूपांनीं मांडून त्यांचीं अतिसंक्षेपरूपें काढा.

११. ४·३७५; ·८१२५; ·३७८७५; २३·०४०९६.

१२. ०·००६८७५; ५·००९६८७५; ·२२२४६४.

पुढील संख्या भागानुबंध पूर्णांकाच्या रूपांनीं व्यवहारी अपूर्णांकांत मांडून, त्यांतील अपूर्ण भागांना अतिसंक्षेपरूपें द्या.

१३. १२·०६७५; ९·२२२१८७५; २३·००६८७५.

१४. ८९·०१३१०७२; १२·०८०५६६४०६२२५.

पुढील व्यवहारी अपूर्णांकांस दशांश अपूर्णांकांच्या रूपांत मांडा.

१५ $\frac{३}{१०}$; $\frac{११७}{१०}$; $\frac{२३}{१००}$; $\frac{१०१५}{१०००}$.

१६. $\frac{१}{१००}$; $\frac{२१}{१००००}$; $\frac{११७}{१०००००}$; $\frac{६}{१००००००००}$.

१७. २ दशांश + ३ शतांश + ३७ दशलक्षांश.

१८. ११ दशांश + ११ सहस्रांश + ११ लक्षांश.

१९. १२ + ३ सहस्रांश + ५ दशलक्षांश.

२०. १०१ दशांश + १० सहस्रांश + १०१ दशलक्षांश.

पुढील दशांश अपूर्णांकांस व्यवहारी अपूर्णांकांच्या रूपांत मांडा.

२१. ·०३७; ·०००२; ·२५; ·३७५.

२२. ·००७५; १·२२५; ·१८७५; ३·२२५.

२३. ·०००६८७५; ·०००९३७५; २३·०३८१२५.

२४. १५·२०३१२५; ·००२३४३७५; ४·००७८१२५.

दशांश अपूर्णांकांची मिळवणी व वजाबाकी.

५८. रीति—दिलेल्या संख्यांचीं दशांशचिन्हें उभ्या रांगेंत येतील अशा संख्या मांडून, त्यांवरच्या रिकाम्या स्थळीं शून्यें कल्पावीं ह्मणजे एकेकाच नांवाचे अंक प्रत्येक उभ्या रांगेंत येतील, ह्मणजे सर्व संख्यांचे समच्छेद होतील.

नंतर पूर्णांकाप्रमाणें एकेकाच नांवाच्या अंकांची मिळवणी किंवा वजाबाकी करून, ते अंक त्याल्याच अंकांखालीं मांडीत जावें. उदाहरण करितांना दशांशचिन्ह नाहीं असें समजून चालावें.

नंतर दशांशचिन्हाखालींच दशांशचिन्ह करावें.

उदाहरण १ लें. २·८१४६, ०·९३८, ८, ·८७५, ३१·२७८८, ४·००८७ ह्यांची बेरीज करा.

उदाहरण २ रें. २·४१८० आणि १·२२३४ ह्यांची वजाबाकी करा.

उदाहरण ३ रें. ·४६८; ९·६४; १०·००८९; ४·८२३ आणि ·६ यांची बेरीज ३३·७२०४ ह्यांतून वजा करा.

हीं उदाहरणें खालीं सोडविलीं आहेत.

उदाहरण १ लें.	उदाहरण २ रें.	उदाहरण ३ रें.
२·८१४६	२·४१८०	३३·७२०४
·०९३८	१·२२३४	०·०४६८
८·००००	१·१९४६	९·६४००
·८७५०		१०·००८९
३१·२७८८		४·८२३०
४·००८७		०·६०००
४७·०७०९		८·६०१७

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. न.

१. ११·२+·३४+·००४+·०००१+२३·००१.

२. ३२१·४+१२+३१·६१५४+·०१+२·२१४+४१५·६२.

३. ·००१२१३+४५·६१३+२३४००१२+१४१००५६.

४. १·००००१२३+३१·१+११७·१५४+२३४३·००८+·०००२

५. ३२·००१–१२·९९९; ३·४५–·०००९८.

६. २३·१४१५–२·००८; ३४१२–२·९९९८७.

७. २२·०००१–२·९९९९; २४१५·६–२४१४·५९८७.

८. ·००१–·०००९९८७; २४·००४–९·८७५१६५.

९. १·०३५४२–·३७४२; ३·०५४–·३०५४.

१०. ·०१२३–·००९०८७; ३·३३–२·९८७६५.

११. ७·६५४३२७–·३७९३०८६+९·०६९९–·००९९९+·३४.५

१२. १६·९४५–२·९९४३८७–·०६७३५–·०००७+·९५३+०·८

१३. २७ दशांश ३४५ शतांश १७ सहस्रांश आणि ४२५६ दशलक्षांश ह्यांची बेरीज करा.

१४. ३४७ दशसहस्रांश आणि ३४७ दशलक्षांश ह्या संख्या दशांशांत मांडून पहिलींत दुसरी वजा करा.

१५. वर्तुळाचा व्यास एक ह्मटला तर वर्तुळाचा परिघ ३·१४१५९२६५३५ येतो ह्या मानाचे जागीं ३·१४१५ व ३·१४१६ ह्यांतून कोणतें स्थूलमान घेण्यांत चुकी कमी होईल तें सकारण सांगा.

दशांश अपूर्णांकांचा गुणाकार.

५९. रीति.—गुण्य व गुणक हे पूर्णांक कल्पून त्यांचा गुणाकार करावा

नंतर ह्या दोहोंतील दशांशस्थळांच्या बेरजेइतकीं अंकस्थळें गुणाकारावरचीं डावीकडे मोजून त्यांच्या मागें दशांशचिन्ह करावें.

ह्या बेरजेपेक्षां गुणाकारांतील अंकस्थळें कमी असलीं तर त्याच्या डावीकडे तितकीं शून्यें ठेऊन, त्यांच्या मागें दशांश· चिन्ह करावें.

---

* संख्या एकदम लक्षांत यावी ह्मणून स्वल्पविराम चिन्हांनीं ती तोडून लिहिण्याची चाल आहे. जसें १०,००० = १० हजार; ४,१५,३२२ = ४ लक्ष १५ हजार ३ शें २२.

उदाहरण १ लें. १·००२५ ह्यांस २·५ ह्यांनीं गुण.

```
  १·००२५
     २·५
 -------
  ५०१२५
 २००५०
 -------
 २·५०६२५
```

उपपत्ति.—वर दिलेल्या दशांशगुण्यांतील द. चि. ४ स्थळें उजवेकडे सारावें आणि दशांशगुणकांतील द. चि. १ स्थळ उजवेकडे सारावें तेव्हां ते गुण्यगुणक पूर्णांक कल्पितां येतील. या स्थलावरून पाहतां पूर्णांक कल्पिलेला गुण्य दशांशगुण्याचे १०,००० पट मोठा असला पाहिजे व पूर्णांक कल्पिलेला गुणक दशांशगुणकाचे १० पट मोठा असला पाहिजे. आतां (अं. भा. १. क. १५८) दशांशगुण्याचीच १०,००० पट केली तर तो गुणाकार दशांशगुणाकाराचे १०,००० पट मोठा येईल आणि दशांशगुणाकाराचीही १० पट केली तर तो गुणाकार दशांशगुणाकाराच्या १०,००० पटींचे १० पट मोठा येईल. ह्यावरून ह्या पूर्णांकी गुणाकाराला १०,०००×१० हा छेद दिला तर तो इच्छिलेला दशांशगुणाकार दाखवील. आतां ह्या गुणाकाराला १०,००० × १० हा छेद देण्यासाठीं ह्या छेदांतील शून्यांच्या (ह्मणजे गुण्यगुणकांतील दशांशस्थलांच्या) बेरजेइतकीं स्थळें मोजून गुणाकारांत दशांशचिन्ह केलें पाहिजे. ह्यावरून वरील रीति सिद्ध आहे.

उपपत्ति २ री.—हा गुणाकार व्यवहारी अपूर्णांकाचे आधारें असा येतो कीं,

$$\frac{१००२५}{१००००} \times \frac{२५}{१०} = \frac{२५०६२५}{१०००००} = २·५०६२५.$$

ह्यांत गुण्य व गुणक हे पूर्णांक असल्याप्रमाणेंच त्यांचा गुणाकार येतो. आणि गुण्यगुणकांतील दशांशस्थळांच्या बेरजेइतकीं शून्यें १ वर, हा त्याला छेद येतो. किंवा त्या बेरजेइतक्या स्थळांच्या मागें दशांशचिन्ह होतें, ह्मणून ह्याच कृति करण्यास वरील रीतींत सांगितलें आहे.

उदाहरण २ रें. ·००४८ ह्यांस ·००००१२ ह्यांनीं गुणा, आणि १·००५×·००५×·००६४ हा गुणाकार करा.

```
      '००४८              १'००५
     '०००१२               '००५
--------------------    ----------
'०००००००५७६ हें उत्तर.    '००५०२५
                          '००६४
                        ----------
                         २०१००
                        ३०१५०
                      -----------
                      '००००३२१६००='००००३२१६ उ.
```

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. प.

१. २२'५ × ३२'१६ ; ४'४१ × ३३'२१.

२. '०००१ × '००१ ; ३२'१ × २'३१.

३. '००३२ × २३'४५ ; '०००२ × ३'०१.

४. २२'५ × '०२४१ × '००२४; '०००३ × '०१ × ५०००००.

५. २'७ × '२७ × ०२७ × २७०.

६. '२ × '०४ × '००८ × ६४०००.

७. १'१ × '०११ × १'०१ × '०१०१.

८. '०१३ × १'६ × '००७ × ३'०५.

९. ३२५ दशांशांस ५४७ दशलक्षांशांनीं गुणा, आणि १२८ दशसहस्रांशांस ७८१२५ कोट्यंशांनीं गुणा.

पुढील पदावलींच्या किमती काढा.

१०. (३७'१ − १९'०८) × '७०३; ३७'१ − १९'०८ × '७०३; $'०५^{3}$ × $'०२५^{2}$ × '०००२५.

११. '४ × '०५ × '००६ × '०००७ × ८०००००; '८४५ × '००१७ × ७'४ × '०९ × १००००.

दशांश अपूर्णांकांचा भागाकार.

६०. रीति.—भाज्य व भाजक हे पूर्णांक कल्पून त्यांचा भागाकार करावा.

भाज्यांतील दशांशस्थळें भाजकांतल्याहून कमी असलीं, तर तितकीं त्यावर शून्यें देऊन, मग भागण्यास लागावें.

नंतर भाज्यांतील दशांशस्थळांत भाजकांतील दशांशस्थळें वजा करून, त्या बाकीइतकीं भागाकारावरचीं अंकस्थळें डावीकडे मोजून, त्यांच्यामागें दशांशचिन्ह करावें.

उदाहरण १ लें. ०·८०५ ह्यास २·३ ह्यांनीं भागा.

२·३) ०·८०५ (०·३५ हें उत्तर.

६९
११५
११५
०००

उपपत्ति.—येथें भाज्य पूर्णांक कल्पिल्यानें त्याची १००० पट होते, आणि भाजक पूर्णांक कल्पिल्यानें त्याची १० पट होते. आतां भाज्य १००० पट मोठा घेतला ह्मणून हा भागाकार १००० पट मोठा असला पाहिजे. तसेंच भाजक १० मोठा घेतला ह्मणून हा भागाकार १० वा हिस्सा लहानही असला पाहिजे. ह्यावरून ३५ ह्या भागाकाराला १००० नीं भागून १० नीं गुणलें ह्मणजे खरा भागाकार येईल. आतां दशांशांतील नि. २ प्रमाणें ३५ ना १००० नीं भागावयाचें ह्मणजे त्यावरील दशांशचिन्ह भाज्यांतल्या दशांशस्थळाइतकीं स्थळें डावीकडे सारावयाचें (जसें ·०३५), आणि ह्या भागाकाराला १० नीं गुणावयाचें ह्मणजे तें दशांशचिन्ह भाजकांतल्या दशांशस्थळांइतकीं स्थळें सोडून उजवीकडे सारावयाचें (जसें ०·३५). येथें भाज्य व भाजक हे पूर्णांक कल्पून भागाकार केला, आणि त्यावरचें दशांशचिन्ह भाज्यांतील द. स्थ.—भाजकांतील द. स्थ. इतकीं स्थळें डावीकडे सारल्यानें खरा भागाकार आला. म्हणून हीच कृति करण्यास वरील रीतींत सांगितलें आहे.

उपपत्ति २ री.— $·८०५ \div २·३ = \frac{८०५}{१०००} \div \frac{२३}{१०}$

$= \frac{८०५}{१०००} \times \frac{१०}{२३} = ३५ \times \frac{१०}{१०००}$

$= \frac{३५}{१००}$ $= ·३५$ हें उत्तर.

ह्या व्यवहारी अपूर्णांकाच्या रीतींत आपण भाज्य व भाजक ह्यांचा भागाकार (३५ हा) पूर्णांकाप्रमाणेंच उत्पन्न केला. नंतर

भाज्यांतील दशांशस्थळांइतक्या १००० ह्या मधल्या शून्यांतून भाजकांतील दशांशस्थलांइतकीं १० मधलीं शून्यें वजा दिलीं, आणि बाकी (२) इतके अंक भागाकारांत (ह्मणजे ३५ त) मोजून त्यांच्या मागें दशांशचिन्ह केलें. हीच कृति हरएक उदाहरणांत यावयाची ह्मणून ही रीति खरी आहे.

उदाहरण २ रें. ८·०५ ह्यांस ·२३ आणि ·००२३ ह्यांनीं वेगळालें भागून कारण सांगा.

$$\frac{८\cdot०५}{\cdot२३} = ३५ \text{ व } \frac{८\cdot०५}{\cdot००२३} = ३५००.$$

कारण $$\frac{८\cdot०५}{\cdot२३} = \frac{८०५}{१००} \div \frac{२३}{१००} = \frac{८०५}{१००} \times \frac{१००}{२३}$$
$$= \frac{८०५}{२३} = ३५.$$

तसेंच $$\frac{८\cdot०५}{\cdot००२३} = \frac{८०५}{१००} \div \frac{२३}{१००००} = \frac{८०५}{१००} \times \frac{१००००}{२३}$$
$$= \frac{८०५}{२३} \times १०० = ३५००.$$

६१. **सूचना.**—भागाकार करतांना जेव्हां भाग बरोबर तुटत नाहीं, तेव्हां भाज्यांकांवर आणखी शून्यें द्यावीं, व तीं भाज्यांकांतील दशांशस्थळांतलींच आहेत असें मानावें. भागाकार पुरा करतेवेळीं भाजकाच्या निमेपेक्षां अधिक बाकी राहिली, तर तो भाग एकानें वाढवावा ह्मणजे कसर कमी जाईल.

उदाहरण ३ रें. २·५ ह्यांस ·३२ ह्यांनीं भागा, आणि १ ह्यास ·०१३ ह्यांनीं भागा.

·३२)२·५००००० (७·८१२५ ·०१३)१·००००००० (७६·९२३०
२२४ ९१
२६० ९०
२५६ ७८
४० १२०
३२ ११७
८० ३०
६४ २६
१६० ४०
१६० ३९
००० १० बाकीबद्दल १

∴ उत्तर ७·८१२५ ∴ उत्तर ७६·९२३१.

रीति २ री—भाजकांतल्या डावीकडल्या ज्या अंकानें भाग बसविणें असतील त्याचे पुढें द. चि. सारून तो अंक एकं करावा. ह्या कृतींत जिकडे जितकीं स्थळें भाजकांतलें दशांशचिन्ह सा-

रिलें असेल, तिकडे तितकींच स्थळें भाज्यांतलें द. चि. सारावें. नंतर ह्या एकंनें भाज्यांतल्या ज्या परिमाणांकाला पहिला भाग बसेल त्याच परिमाणाचा तो भाग समजावा. ह्मणजे आरंभापासूनच प्रत्येक भागाचें स्थळपरिमाण समजत जातें.

उदाहरण. '०१५९५ ह्यांस '२७५ ह्यांनीं भागा.

'२'७५) '०'१५९५० ('०५८
१३७५
२२००
२२००
००००

उपपत्ति. भाजकाचें द. चि. एक स्थळ उजवेकडे सारल्यानें त्यांतला डावीकडचा अंक एकं होतो. ह्मणून दिलेला भाज्य व भाजक ह्या दोहोंचीही द. चि. एक एक स्थळ उजवीकडे सारून ते समान पट मोठे केलेले भाज्य भाजक घेतले. भाज्य व भाजक या दोहोंच्या समान पटी केल्या तर भागाकार बदलत नाहीं, ह्मणून बाजूचा भागाकार हा इच्छिलेल्या भागाकाराइतकाच येईल.

आतां २ या एकंनें १५ या शतांशांना भागिलें तर ५ हा शतांशाचाच भाग लागेल. कारण २ एकं हा गुणक व ५ हा गुण्य यांचा गुणाकार १५ शतांशांत वजा होण्यासाठीं शतांश दाखविणारा आला पाहिजे. गुणक एकं असला तर गुणाकार गुण्याच्या जातीचा व्हावयाचा, ह्मणून ५ हे शतांशच असले पाहिजेत. यावरून एकंनें ज्या परिमाणाला भागावें त्याच परिमाणाचा भागाकार यावयाचा असा वहिवाटीचा नियम निघतो. ह्या नियमाप्रमाणें ५ हे शतांशाचे स्थळीं मांडून भागाकार पुढें चालविला, तेव्हां ५८ सहस्रांश हें उत्तर आलें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. फ.

१. १५'६२५ ÷ २५; '०१५६२५ ÷ २५.
२. १५६२'५ ÷ '०००२५; १'५६२५ ÷ २५०००.
३. १८१'३ ÷ '०००३७; १७१'९९ ÷ २७'३.
४. ९'०६५ ÷ '०४९; '०३ ÷ '००१.
५. ८ ÷ '००३; ६७'५ ÷ ७६८.

६. १५ ÷ ६·२५ ; १७·२८ ÷ ·०१४४.

७. ·००१२८ ÷ ८·१६२ ; १७०८०·४५९२ ÷ ·०००२४.

८. ·०००२ ÷ ·०१६३ ; ४ ÷ ·००२५५.

९. ११·१ ÷ ३२·७६ ; ·०१२३ ÷ ३२·१.

१०. २·१११७ ÷ ·००७३ ; ·०३२ ÷ २·११३७.

११. ·१ ला ·०१ नें भागा; ·०१००१ ह्यांना ·००१ नें भागा; ९२·७ ह्यांना ·०६ ह्यांनीं भागा; आणि ९९ ना ·०००९ ह्यांनीं भागा.

१२. ·२१३४१९५९६ ह्यांना ·०१००१०३ ह्यांनीं भागा; $\text{६·२५}^{२}$ ह्याला $\text{·०२५}^{३}$ ह्यानें भागा आणि ·००१ ह्याला ·१००१ ह्यांनीं भागा.

१३. २ व २२ शतांश आणि ७४ दशसहस्रांश ह्या संख्या दशांशांत मांडा आणि पहिलीला दुसरीनें भागून भागाकार काढा.

पुढील भागाकार सांगितलेल्या स्थळांपावेतों करा.

१४. ·७६५४४३९ ÷ ३·५९·२१ द. स्थ. ५; ·५ ÷ ७६·९११३४२ द. स्थ. ६.

१५ ·०४६ ÷ ·००·७६२०८९ द. स्थ. ४ ; ·३२१६५ ÷ ·००३५२१६ द. स्थ. ३.

१६. ·०१३८५ × ६१·३७ ÷ २·७७; ३८३३३३६ ÷ (८·९९ × २०·८).

१७. ·३९९ × ·००७ ÷ ·००००१९; $\text{२·०५}^{२}$ × २ २४ ÷ ·००४१.

१८. १५·८४०२ × ३·६८९ ÷ ६७२·४ द. स्थ. ६ ; २०६·५९ ÷ १८७२ × ·००१ द. स्थ. ५.

१९. $\frac{\text{·००७५ × २·१}}{\text{·०१७५}}$; $\frac{\text{४·२५५ × ·००६४}}{\text{·०००३२}}$; $\frac{\text{५}\frac{२}{५}}{\text{७}\frac{१}{२}}$ चे $\frac{\text{२१·२५}}{\text{·०४६८७५}}$ ह्यांना सरळ रूपें द्या.

२०. १·४६५, ·००९५, ३७·१५, २८·४५७ आणि १६·१६८५ ह्यांच्या बेरजेला ·०२९६ ह्यांनीं भागा.

२१. ३०·३३ आणि ·०३३७ ह्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व उलट सुलट दोन भागाकार हे करून ह्या सर्वांची बेरीज सांगा.

२२. $\frac{१·१८}{·१५२} \times \frac{३·०४}{२·९५}$ ह्यांच्या सरळ रूपाला ·००१२५ ह्यांनीं भागा.

व्यवहारी अपूर्णांकास दशांश अपूर्णांकाचें रूप देणें.

६२. रीति.—व्यवहारी अपूर्णांकाचे अंशावर पहिलें, दुसरें, इत्यादि शून्यें घेत जाऊन किंवा एकदम कांहीं शून्यें घेऊन दशांश भागाकार करावा. येईल तें दशांशरूप होय. ह्या कृत्यांत भाग तुटला तर उत्तर खरें येईल, नाहीं तर नियमित स्थळापावेतोंच उत्तर खरें हेईल.

उदाहरण १ लें. $\frac{१५}{१६}$ ह्यांना दशांशाचें रूप द्या.

$१६)\frac{१५००००}{·९३७५}($ **उपपत्तिः**—१५ एकंवर पहिलें शून्य घेतलें, ह्मणजे १५ एकंचे दशांश १५० होतात. कारण, १ एकं = १० दशांश. ह्या दशांशांना १६ एकंनीं ९ दशांशाचा भाग लागतो, आणि बाकी ६ ही दशांशांची उरते. ह्या बाकीवर दुसरें शून्य घेतलें ह्मणजे, ६ दशांशांचे ६० शतांश होतात. कारण, १ दशांश = १० शतांश. ह्यांना १६ एकंनीं ३ शतांशांचा भाग लागतो, आणि बाकी १२ शतांश राहते. ह्याप्रमाणें पहिलें शून्य घेऊन लावलेल्या भागाला १० चा १ घात ह्म० १० छेद येतो, दुसरें शून्य घेऊन लावलेल्या भागाला १० चा २ घात ह्म० १०० हा छेद येतो, ह्मणजे जितकीं शून्यें घ्यावीं तितक्यावाच १० चा घात छेद येतो.

येथें १५ वर एकदम ४ शून्यें घेऊन त्यांचे दशसहस्रांश केलेले कल्पिले तर ह्या दशसहस्रांशांना १६ एकंनीं ९३७५ दशसहस्रांशाचा भाग लागला असें ह्मटलें पाहिजे. आणि ह्या भागाकाराला १० चा त्या शून्यांइतका ह्मणजे ४ घात हा छेद जोडिला पाहिजे.

अथवा अपूर्णांकाचे अंशछेदांना १० च्या समान घातांनीं गुणलें तर त्या अपूर्णांकाची किंमत बदलणार नाहीं ह्मणून,

$$\frac{१५}{१६} = \frac{१५}{\cancel{१६}_{१}} \times \frac{\cancel{१००००}^{६२५}}{१००००} = \frac{९३७५}{१००००} = ·९३७५.$$

ह्याही विचारें वरील कृत्याची उपपत्ति जुळते.

६३. ह्या कृत्यांत अपूर्णांकाला जो छेद असतो तोच छेद त्याचे प्रत्येक स्थळींच्या बाकीला असतो. ह्मणून त्या बाकीची किंमत तेथल्या एका स्थलपरिमाणापेक्षां कमी असते. उदाहरणार्थ वरील कृत्य २ दशांशस्थलांपावेतोंच केलें तर $\frac{१५}{१६} = ·९३\frac{१२}{१६}$ येतात, व भाग तुटेपर्यंत केलें तर $\frac{१५}{१६} = ·९३७५$ येतात. ह्यांत शतांशस्थळींची बाकी १२ आली आहे. ती जर १६ आली असती तर तिची किंमत १ शतांश असती, व ३ चे जागीं ४ हा भाग लागला असता. परंतु हिची किंमत शतांशापेक्षां कमी आहे, ह्मणून पुढील कृत्यांत ह्या बाकीचे जागीं ·००७५ आले आहेत. ह्याप्रमाणें कोणत्याही स्थलींच्या बाकीबरोबर त्या स्थलावरची एकंदर दशांशपंक्ति असावयाची. ह्मणून,

६४. नियम १ ला.—कोणत्याही स्थळींच्या बाकीची किंवा स्थलावरच्या दशांशपंक्तीची किंमत ही त्या स्थलींच्या १ परिमाणापेक्षां कमी असावयाची.

ह्यावरून $\frac{१५}{१६}$ चे जागीं ·९३ ही किंमत घेतली तर बाकी १२ सोडल्यासारखें होतें. आतां ही बाकी १६ असती तर ३ बद्दल भाग ४ चा लागला असता. ह्मणून बाकी सोडल्यानें जी कसर जाईल ती $\frac{१}{१००}$ पेक्षां कमी जाईल, व ·९३७ ही किंमत घेतली तर $\frac{१}{१०००}$ पेक्षां कमी कसर जाईल.

उदाहरण २ रें. $\frac{३}{६४}$ ह्यांना दशसहस्रांशापावेतों खऱ्या किंमतीचें दशांशरूप द्या.

येथें भागाकारांत दशसहस्रांशाचा भाग लागेपर्यंत करीत जाऊन पुढें बाकी सोडून दिली पाहिजे. अथवा १०००० नीं अंशछेदांस गुणिलें पाहिजे.

$$\frac{३}{६४} = \frac{३}{६४} \times \frac{१००००}{१००००} = \frac{४६८\frac{३}{४}}{१००००} = ·४६८\frac{३}{४}.$$

ह्यांतील $\frac{३}{४}$ ची किंमत वरील नियमाप्रमाणें १ दशसहस्रांशा-

पेक्षां कमी आहे, ह्मणून ·०४६८ हें $\frac{३}{६४}$ चें इच्छिलेलें रूप आहे. ह्मणजे दशसहस्रांशापावेतों खऱ्या किंमतीचें रूप आहे.

६५. वरील रीतीवरून असें दिसून येईल कीं, दिलेल्या अपूर्णांकाच्या अंशछेदांना १० चे समान घात गुणक जोडावे, नंतर अपूर्णांकाचा छेद आणि अंशस्थलींचा १० चा घात ह्यांना संक्षेप जाऊन त्या छेदस्थलीं १ राहिला तर दशांशरूपाचा शेवट होईल, आणि छेदस्थलीं दुसरा अंक राहिला तर तेथें दशांशरूपाचा शेवट होणार नाहीं.

आतां १० चे अवयव २ × ५ हे आहेत, ह्मणून १० च्या कोणत्याही घाताचे अवयव २ चा तेवढा घात × ५ चा तेवढा घात हे असावयाचें ह्यावरून अपूर्णांकाला अतिसंक्षेपरूप दिलेलें असलें, व त्याच्या छेदांत २ व ५ ह्यांचेच घात अवयवरूपानें असले, तर त्यांचा संक्षेप जाऊन छेदस्थलीं १ राहील. ह्मणून,

६६. **नियम २ रा.**—अतिसंक्षेपरूप दिलेल्या अपूर्णांकाच्या छेदस्थळीं २ व ५ ह्यांचेच घात अवयवरूपानें असले तर त्यांतील मोठ्या घाता इतक्याव्या स्थळीं त्याचें दशांशरूप संपेल.

उदाहरण ३ रें. $\frac{२१}{१२५००}$ ह्या अपूर्णांकाचें दशांशरूप कितव्या स्थळीं संपेल तें सांगून, ह्याला दशांशरूप द्या.

ह्या अपूर्णांकाच्या छेदाचे अवयव ५ × $२^२$ हे आहेत. ह्यापैकीं अवयव अंशांत नाहीं, ह्मणून ह्याच्या दशांशरूपाचा शेवट ५ व्या स्थळीं होईल. जसा,

$$\frac{२१}{१२५००} = \frac{२१}{१२५००} \times \frac{१०००००}{१०००००} = \frac{२१}{५^५ \times २^२} \times \frac{५^५ \times २^५}{१०^५}$$

$$= \frac{२१}{१२५} \times \frac{१०००}{१०००००} = \frac{२१}{१} \times \frac{२^३}{१०^५}$$

$$= \frac{२१}{१} \times \frac{८}{१०००००} = \frac{१६८}{१०००००} = ·००१६८.$$

६७. **नियम ३ रा.**—अतिसंक्षेपरूपी अपूर्णांकाच्या छेदस्थळीं २ व ५ ह्यांच्या घाताखेरीज अंक असला, तर त्याचें दशांशरूप कोठेंही संपणार नाहीं, आणि रूपांत त्या अंकापेक्षां कमी स्थळांची अंकपंक्ति पुनः पुनः येत जाईल.

उदाहरणार्थ $\frac{३}{२८}$ हा अपूर्णांक घ्या. ह्याचे छेदस्थळीं $२^{२}$.७ हे अवयव आहेत, ह्मणून क्रमिक भागाकारानें दशांशरूप देतां येतें. पुढचें कृत्य पहा.

४	३००
७	.७५००००००००००
	.१०७̇१४२८५̇७१

३ ना $२^{२}$ नें भागतां हा भागाकार नियम २ प्रमाणें २ दशांश स्थळें येऊन संपावयाचा परंतु ह्या भागाकाराला ७ नीं भागूं लागलें असतां १० मध्यें ७ हा अवयव नसल्यामुळें प्रत्येक भागापुढें ७ ह्या छेदाची बाकी रहात जावयाची, ह्मणून ह्या भागाकाराचा शेवट कोठेंही होणार नाहीं.

दुसरें, ७ नीं भागतांना प्रत्येक वेळची बाकी ७ पेक्षां कमी रहावयाची, ह्मणून फार तर ६ वेळ वेगळाल्या बाक्या राहतील. वरच्या भागाकारांत १, ३, २, ६, ४, ५, ह्या क्रमिक बाक्या राहतात ह्या तपासून पहा. ह्यापुढें पूर्वींची बाकी पुनः राहून तिची पूर्वींप्रमाणेंच १० पट व्हावयाची, ह्मणून तिला पूर्वींचाच भाग पुनः लागेल व त्यापुढें पूर्वींचीच दुसरी बाकी पुनः येईल, ह्मणून असल्या अनंत अंकांपावेतों चालणाऱ्या भागाकारामध्यें फिरत्या भोंवऱ्यावरच्या अंकवलयाप्रमाणें एकदा आलेलीच अंकपंक्ति पुनः पुनः येत जाईल हें उघड आहे. ह्याप्रमाणें वर दिलेला आवर्त दशांशाचा उत्पादक नियम सर्वांशीं खरा आहे.

आवर्त दशांश.

६८. **आवर्त दशांश.**—ज्या अपूर्णांकामध्यें नेमलेलेच अंक तशाच क्रमानें पुनः पुनः येतात, त्याला आवर्त दशांश (भोवऱ्याचे दशांश) ह्मणतात, आणि त्या नेमलेल्या अंकांना आवर्तांक किंवा आवर्तपंक्ति ह्मणतात. जसें ३.३७५ ३७५ ३७५ इ०

६९. **लेखनसंकेत.**—आवर्त दशांश मांडणें असला ह्मणजे त्यांतल्या आवर्तांकावर किंवा आवर्तपंक्तीच्या आद्यंतींच्या अंकांवर टिंबें देतात. ह्या संकेतानें हे दशांश अनंत स्थळांपावेतों मांडले जातात.

उदाहरणार्थ पुढील अपूर्णांकांच्या बरोबरीचे दशांश व त्यां- तील आवर्तांक किंवा आवर्तपंक्ति पहा.

$$\frac{१}{९} = \cdot\dot{१} \qquad \frac{१}{१८} = \cdot०\dot{५}$$

$$\frac{५}{११} = \cdot\dot{४}\dot{५} \qquad \frac{५}{२२} = \cdot२\dot{२}\dot{७}$$

$$\frac{३}{७} = \cdot\dot{४}२८५७\dot{१} \qquad \frac{३}{२८} = \cdot१०\dot{७}१४२८\dot{५}$$

$$\frac{२५००}{२७} = ९२\cdot\dot{५}९\dot{२}.$$

७०. आवर्त दशांशांत दोन प्रकार आहेत एक शुद्ध व दुसरा मिश्र.

७१. **शुद्ध आवर्त दशांश.**–ज्या आवर्त दशांशांत दशांशचि- न्हाशींच आवर्तपंक्तीला आरंभ होतो, त्याला **शुद्ध आवर्त दशांश** ह्मणतात. उदाहरणार्थ वर दिलेले डाव्या बाजूचे दशांश पहा.

मिश्र आवर्त दशांश.—ज्यांत दशांशचिन्हापुढें कांहीं दशां- शांक आल्यावर आवर्तपंक्तीला आरंभ होतो, त्याला **मिश्र आ- वर्त दशांश** ह्मणतात, आणि चिन्हाजवळच्या दशांशांकांना **अनावर्तांक** किंवा **अनावर्तपंक्ति** ह्मणतात. उदाहरणार्थ वरतीं उ- जव्या बाजूस दिलेले मिश्र दशांश आहेत आणि त्यांतील ०, २, व १०, हे अनावर्तांक किंवा अनावर्तपंक्ति आहेत.

७२. **सूचना १ ली.**—वरचीं उदाहरणें व दशांशरूपाचा नि. २ रा व ३ रा ह्यांवरून लक्ष्यांत येईल कीं, छेदस्थळीं २ व ५ ह्यांखेरीज अंक असला तर आवर्तपंक्ति येते, तशीच २ व ५ ह्यांपैकींही कोणाचा घात छेदस्थळीं असला तर त्या घाता- इतक्या अंकांची अनावर्तपंक्ति येते. दुसरें १० चा घात अंशा- मध्यें अवयवरूपानें असला, तर आवर्तपंक्तीचा आरंभ पूर्णां- कांतच होतो (शेवटची संख्या पहा) तरी आवर्तपंक्तीचा आरंभ कोठेंही कल्पितां येतो, ह्मणून तो आपण दशांशचिन्हा- पासून कल्पितों.

७३. **सूचना २ री.**—एकाची पट कोणतीही संख्या असते ह्या धोरणानें जर अंशस्थळीं १ घेऊन त्या अपूर्णांकाला थोडेसें दशांशरूप दिलें आणि त्या दशांशरूपांतली बाकी त्यावर अपू-

र्णांकरूपानें मांडली, तर त्या दशांशरूपाची पट करून तें रूप पाहिजे तितकें वाढवितां येतें.

उदाहरण. $\frac{१}{१९}$ ह्यास दशांशरूप द्यावयाचें

आतां $\frac{१}{१९} = \cdot ०५२६३\frac{३}{१९}$.

∴ $\frac{३}{१९} = \cdot १५७८९\frac{९}{१९}$.

व $\frac{१}{१९} = \cdot ०५२६३१५७८९\frac{९}{१९}$.

∴ $\frac{९}{१९} = \cdot ४७३६८४२१०५\frac{५}{१९}$.

ह्मणून $\frac{१}{१९} = \cdot ०५२६३१५७८९४७३६८४२१०५\frac{५}{१९}$.

ह्याप्रमाणें पुढें करीत गेलें असतां दर खेपेस अंक दुपटीनें वाढत जातात.

वरच्या उदाहरणांत १८ स्थळांपलीकडे फिरून तेच ते अंक येऊं लागले, ह्मणून भागाकारांत आवर्तपंक्तीच्या खुणा खालीं दाखविल्याप्रमाणें कराव्या.

$$\frac{१}{१९} = \cdot \dot{०}५२६३१५७८९४७३६८४२\dot{१}.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ब.

पुढच्या प्रत्येक अपूर्णांकाचें दशांशरूप कोणत्या स्थळीं संपेल तें प्रथम ठरवून, नंतर त्यांस दशांशरूपें द्या.

१. $\frac{२}{५०}$; $\frac{१३}{२५०}$; $\frac{४७}{८}$; $\frac{१०००}{६२५}$.

२. $\frac{१०६}{१२५}$; $११\frac{१७}{१२५०}$; $\frac{४०००}{२५६}$; $५\frac{३}{१६}$.

३. $७\frac{१३}{६४}$; $\frac{१७}{१२८}$; $\frac{१०}{६४००}$; $११\frac{५३}{३१२५०}$.

४. $\frac{१}{५१२}$; $\frac{१०२५}{१०२४}$; $\frac{१३}{१४००}$; $\frac{७}{५१२०}$.

५. $\frac{१५\frac{१}{२}}{१६}$ चे $\frac{११}{६२\frac{१}{२}}$; ७॥ चे $\frac{१८}{६२५००}$; $१\frac{२}{१९}$ चे $१\frac{१}{७५}$ चे $\frac{२}{७}$.

पुढच्या प्रत्येक अपूर्णांकाच्या दशांशरूपांत अनावर्तपंक्ति किती स्थलांची येईल, व आवर्तपंक्तींत कोणापेक्षां कमी अंक येतील तें ठरवून, त्यांना दशांशरूपें द्या.

६. $\frac{१३}{९}$; $\frac{१०३}{१८०}$; $\frac{१२९}{५५}$; $\frac{१७}{१३७५}$.

७. $\frac{४१}{९४}$; $\frac{१११}{२२}$; $\frac{२२}{१६६५}$; २३$\frac{५२}{३३३}$.

८. $\frac{८९}{९९९९}$; $\frac{१२१}{२१}$; १७$\frac{६४०१}{४९५००}$; $\frac{४१११}{३३३००}$.

९. $\frac{१३५}{३७००}$; $\frac{२९७}{२९६०}$; $\frac{३७८}{९२५}$; $\frac{११३९}{५५५५५}$.

१०. $\frac{१}{१७}$; $\frac{१}{२३}$; $\frac{१}{२९}$; $\frac{१}{३१}$.

पुढील अपूर्णांकांना आवर्त दशांशरूपें द्या, आणि त्यांच्या छेदस्थळींचा १ अंकाची पंक्ति देणारा अंक ९ मध्यें, २ अंकांची पंक्ति देणारा अंक ९९ त, ३ अंकांची पंक्तिं देणारा अंक ९९९ त, अशा क्रमानें आढळतात कीं नाहीं तें तपासा.

११. $\frac{२}{३}$; $\frac{४}{३^{२}}$; $\frac{४}{३^{३}}$; $\frac{८}{३^{४}}$; $\frac{१}{३^{४}}$;

१२. $\frac{२^{४}}{११}$; $\frac{१३}{२^{३}\cdot११}$; $\frac{१९}{५^{४}\cdot११}$; $\frac{१}{११^{२}}$

१३. $\frac{२}{३७}$; $\frac{५}{१०१}$; $\frac{१००}{४१}$; $\frac{२५}{२७१}$.

१४. $\frac{१}{७}$; $\frac{१}{१३}$; $\frac{१}{३^{३}\cdot११}$; $\frac{१}{११\cdot३७}$.

आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देण्याचा प्रकार.

७४. उदाहरणार्थ ·३̇५७̇ ह्या शुद्ध आवर्त दशांशाला व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देणें आहे असें समजा. आतां,

अपूर्णांक = ·३५७ ३५७ ३५७ ३५७ इ.

∴ १००० अपूर्णांक = ३५७ ·३५७ ३५७ ३५७ इ.

वजाबाकीनें ९९९ अपूर्णांक = ३५७

∴ अपूर्णांक = $\frac{३५७}{९९९}$.

ह्या उदाहरणांत आवर्तपंक्ति ३ अंकांची होती, ह्मणून अपूर्णांकाची १००० पट करून एक आवर्तपंक्ति पूर्णांक केली, ह्मणून वजाबाकींत तीच पंक्ति शिलक राहून तिला ३ दांच ९ छेदस्थळीं आले आहेत. ह्या कृतीनें केवढ्याही आवर्तपंक्तीला व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देतां येईल. ह्मणून,

रीति.—शुद्ध आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप

द्यावयाचें झाल्यास ते आवर्तांक अंशस्थानीं लिहून त्यांच्या स्थलसंख्येइतके ९ छेदस्थानीं लिहावे. पुढें भूमिति अेढींत हें प्रकरण पहा.

उदाहरणें.

$$\cdot\dot{३}७\dot{८} = \frac{३७८}{९९९}.$$

$$\cdot\dot{०}३७\dot{८} = \frac{३७८}{९९९९}.$$

$$\cdot\dot{०}००३७\dot{८} = \frac{३७८}{९९९९९९}.$$

७५. सूचना १ ली.—शुद्ध आवर्त दशांशाचे शेजारीं दशांशचिन्हाच्या अलीकडे एकादा पूर्णांक असला, तर तो भागानुबंध पूर्णांकाप्रमाणें मांडावा.

उदाहरणें.

$$३\cdot\dot{४} = ३\tfrac{४}{९};\quad ५\cdot\dot{४}\dot{३} = ५\tfrac{४३}{९९}.$$

७६. सूचना २ री.— दिलेले सर्व अंक उणा दशांशचिन्हाच्या अलीकडचा पूर्णांक, हे अंशस्थानीं लिहून छेदस्थानीं आवर्तांक स्थळांइतके ९ लिहावे.

उदाहरणें.

$$३\cdot\dot{४} = \frac{३४ - ३}{९} = \frac{३१}{९} = ३\tfrac{४}{९}.$$

$$५\cdot\dot{४}\dot{३} = \frac{५४३ - ५}{९९} = \frac{५३८}{९९} = ५\tfrac{४३}{९९}.$$

ह्या रीतीची उपपत्ति पुढील लिहिण्यावरून समजेल.

$$३\tfrac{४}{९} = \frac{३ \times ९ + ४}{९} = \frac{३(१० - १) + ४}{९} = \frac{३० + ४ - ३}{९} = \frac{३४ - ३}{९}.$$

$$५\tfrac{४३}{९९} = \frac{५ \times ९९ + ४३}{९९} = \frac{५(१०० - १) + ४३}{९९} = \frac{५०० + ४३ - ५}{९९} = \frac{५४३ - ५}{९९}.$$

मिश्र आवर्त दशांशास व्यवहारी अपूर्णांकाचे रूप देण्याचा प्रकार.

७७ उदाहरणार्थ—$१४\cdot८\dot{७}\dot{२}$ ह्या मिश्र अपूर्णांकाला व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देणें आहे असें घ्या. येथें,

$$\text{अपूर्णांक} = १४\cdot८\dot{७}\dot{२}७२७२ \text{ इ.}$$

$$\therefore\quad १००० \text{ अपूर्णांक} = १४८७२\cdot७२७२७२७२ \text{ इ.}$$

व $\qquad$ १० अपूर्णांक = १४८·७२७२७२७२ इ.

वजाबाकीनें ९९० अपूर्णांक = १४८७२−१४८

$$\therefore \quad \text{अपूर्णांक} = \frac{१४८७२-१४८}{९९०} = \frac{१४७२४}{९९०}$$ हे उ.

येथें एक आवर्तपंक्ति पूर्णांक व्हावी असा प्रथम गुणक घेतला, आणि अनावर्तपंक्ति पूर्णांक व्हावी असा मागून गुणक घेतला, ह्यामुळें ह्यांच्या वजाबाकींत अंशस्थळीं पूर्णांक येऊन छेदस्थळीं आवर्तपंक्तींतील अंकांइतके ९ आले, आणि त्यांवर अनावर्तपंक्तींतील अंकांइतक्रीं शून्यें आलीं. ही कृति हरएक उदाहरणाला लागू होणारी आहे. ह्मणून,

रीति.—पूर्णांक, अनावर्त, व आवर्त, ह्या सर्व संख्येंतून पूर्णांक व अनावर्त ही संख्या वजा द्यावी, आणि तिला आवर्तांकांइतक्या नवांवर अनावर्तांकांइतक्रीं शून्यें चढवून तो छेद द्यावा, ह्मणजे तो इष्ट अपूर्णांक होईल.

उदाहरणें.

$$\cdot३\dot{४} = \frac{३४-३}{९०} = \frac{३१}{९०}$$

$$\cdot०३\dot{४} = \frac{३४-३}{९००} = \frac{३१}{९००}.$$

$$\cdot५\dot{४}\dot{३} = \frac{५४३-५}{९९०} = \frac{५३८}{९९०} = \frac{२६९}{४९५}.$$

$$\cdot००५\dot{४}\dot{३} = \frac{५४३-५}{९९०००} = \frac{५३८}{९९०००}$$

$$२\cdot४\dot{६} = \frac{२४६-२४}{९०} = \frac{२२२}{९०} = २\frac{४२}{९०} = २\frac{७}{१५}.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. भ.

१. $\cdot\dot{३}$; $\cdot\dot{०}\dot{५}$; $\cdot\dot{५}\dot{४}$; $\cdot\dot{७}२\dot{९}$.

२. $\cdot०\dot{२}\dot{४}$; $\cdot०\dot{४}३\dot{२}$; $३\cdot००६\dot{७}\dot{२}$; $२\cdot०४\dot{३}\dot{२}$.

३. $३\cdot४\dot{१}\dot{८}$; $\cdot०४४\dot{३}$; $१\cdot१\dot{४}\dot{५}$; $\cdot००४\dot{४}\dot{९}$.

४. $४\cdot०\dot{५}३\dot{१}$; $\cdot७६\dot{५}३\dot{१}$; $२\cdot३\dot{४}\dot{५}$; $\cdot०९\dot{३}१\dot{८}$.

५. $२\cdot०\dot{९}०\dot{९}$; $\cdot५\dot{४}९५\dot{०}$; $१\cdot०\dot{४}२८५७\dot{१}$.

६. $२\cdot६\dot{४}२८५७\dot{१}$; $५\cdot१९३\dot{१}\dot{८}$; $११\cdot२\dot{८}\dot{७}$.

आवर्त दशांशांचीं बिनकसर कृत्यें.

७८. वर जी आवर्त दशांश अपूर्णांकास व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप देण्याची रीति सांगितली तीवरून असें होतें कीं, जर ·९̇ हा आवर्तांक आहे तर $\frac{९}{९}$ = १ होईल. आतां ह्याच्या उलट कृति केल्यानें १ = ·९९९९ इ. आणतां येत नाहींत हें खरें; परंतु थोडेंसें लक्ष दिलें तर ·९९९ इ. पुष्कळ ९ घेतले तर त्यांपासून जो दशांशांक येईल त्यांत आणि १ ह्यांत जें अंतर पडणार तें लक्षांत आणण्याजोगें नसतें, ह्मणजे फारच थोडें असतें. पहा.

१ − ·९ = ·१ = $\frac{१}{१०}$.

१ − ·९९ = ·०१ = $\frac{१}{१००}$.

१ − ·९९९ = ·००१ = $\frac{१}{१०००}$.

१ − ·९९९९९९९९९९ = ·००००००००० १ = $\frac{१}{१००००००००००}$.

ह्यावरून स्पष्ट लक्षांत येईल कीं; ९ जितके जितके अधिक घ्यावे तितकी तितकी कसर कमी होत जाते. तेव्हां हें उघड आहे कीं, ९ अनंतापावेतों घेत गेलें ह्मणजे शेवटीं कसर शून्य होईल.

ह्याप्रमाणें शेवटीं कसर शून्य होते म्हणून १ = ·९̇ कारण ·९̇ ह्या आवर्तांकानें ·९९९ इ. अनंत अंकांची पंक्ति सूचित होते. ह्याचप्रमाणें कोणताही आवर्तांक आणि कोणताही व्यवहारी अपूर्णांक ह्यांच्यांमधील कसर शून्य होत आहे तर तो अपूर्णांक त्या आवर्त दशांशाबरोबर आहे असें म्हणतां येईल; कारण आवर्तांक पाहिजे तितके वेळ घेऊन कसर हवी तितकी कमी करितां येते. म्हणून,

७९. **सूचना.**—दशांशांत ९ हा आवर्तांक येतो, तेव्हां तो पुसून टाकून मागच्या अंकांत १ मिळविण्यास चिंता नाहीं. जसें ·४९९९९ इ० = ·५. हें रीतीप्रमाणें करून पाहिलें तरी येईल.

·४९̇ = $\frac{४९-४}{९०}$ = $\frac{४५}{९०}$ = $\frac{५}{१०}$ = ·५.

दशांशाचे हिशेब करतांना बाकी सोडावी लागते तेव्हां उत्तर बिनकसर मिळत नाहीं, परंतु आवर्तपंक्ति सांपडली असतां उत्तर बिनकसर मिळतें.

उदाहरण १ लें. १३·५̇; २·०२̇५̇; १११·०००४̇; ३·१४̇१५̇९̇; २·०̇२४̇; ह्यांची बेरीज बरोबर येई अशी करा.

```
  १३·५५५५५५५५५५५५
   २·०२५२५२५२५२५२
 १११·०००४४४४४४४४४
   ३·१४१५९१५९१५९१
   २·०२४०२४०२४०२४
 ─────────────────
 १३१·७४६८६८१४०८६६
```

समजूत.—ह्या बेरजेच्या रकमांत मोठी अनावर्तपंक्ति तीन अंकांची आहे, तेव्हां ह्यांच्या बेरजेंत दशांशचिन्हापुढें ३ अंक अनावर्त येतील. ह्या रकमांत, १, २, व ३ अंकांच्या आवर्तपंक्ति असून त्या अंकांचा ल. सा. भा. ६ येतो, तेव्हां ६ अंकांच्या रांगेत एक अंकाच्या पंक्ति ६, दोन अंकांच्या पंक्ति ३, व तीन अंकांच्या पंक्ति २ राहून ६ वे स्थळीं ह्या एकंदर पंक्ति पूर्ण होतील. अर्थात ह्यांच्या बेरजेंत ६ अंकांच्या आवर्तपंक्ति येतील. ह्यावरून ३ नीं ६ = नऊ अंकांपावेतों बेरीज खरी आली पाहिजे. ह्या बेरजेंत रकमा थोड्या आहेत, यासाठीं ३ अंक फाजील घेतल्यानें ही बेरीज बिनचूक येईल, ह्मणून १२ अंकापावेतों बेरीज केली. ह्या बेरजेंत तीन अनावर्तांकांपुढें सहा अंकांची आवर्तपंक्ति समग्र मिळाली आहे, हिनें ही बेरीज अनंत अंकांपावेतों बिनचूक दाखविली जाईल हें उघड आहे. ह्मणून १३१·७४६̇८६८१४०̇ हें उत्तर.

आवर्तपंक्ति मोठी येत असली, तर जितके दशांशस्थळांपर्यंत बेरीज बरोबर पाहिजे त्यापेक्षां दोन किंवा तीन स्थळें वाढवावीं, ह्मणजे बेरीज तितक्या स्थलांपावेतों बिनचूक येईल.

उदाहरण २ रें. १·०२३̇४१̇ ह्यांतून ·६२८̇ हे वजा करून बाकी खरी आणा.

```
 १·०२३४१३४१३
  ·६२८८८८८८८
 ───────────
  ·३९४५२४५२५
```

उत्तर ·३९४̇५२̇.

८०. आवर्त दशांशांचा गुणाकार किंवा भागाकार करणें झाल्यास, त्यांस व्यवहारी अपूर्णांकांचीं रूपें देऊन त्यांत गुणा-

कार किंवा भागाकार करावा, आणि तदनंतर पाहिजे तर त्यांस दशांश अपूर्णांकांत न्यावें. जसें —

उ. १ लें. ·२५̇ × ·३̇६̇ = २३/९० × ३६/९९ = ४६/४९५ = ·०९̇२̇.

उ. २ रें. ·१६̇ ÷ ·००२̇७̇ = १५/९० ÷ २७/९९०० = ५५०/९ = ६१·१̇.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. म.

पुढच्या कृत्यांचीं उत्तरें ७ दशांशस्थळांपर्यंत बरोबर पाहिजेत.

१. ·१३८̇ + ·१̇४२८५७̇ + २·४१̇८̇ + २·०६̇ + ४२·६̇३̇ + ·००८४̇९७१३३̇.

२ ३७·२३̇ + ·२६̇ + ७·७̇२̇ + ·२९७̇ + ३·९̇७३̇ + ८ + ४·७५ + ७४·०३६७ + ३२·४१̇.

३. ·३̇ − ·०̇९̇ आणि ·०̇४̇ − ·००७̇६९२३८̇.

४. ७ − ६·१̇४२८५७̇ आणि ·४२̇ − ·०३̇६̇.

५. ३७·२३̇ × ·२६̇ आणि ७·७̇२̇ × ·२९७̇.

६. ३·९̇७३̇ × ८ आणि ७४·०३६७ × ४·७५̇.

७. ·३̇ ÷ ·०̇९̇ आणि ·०̇४̇ ÷ ·७̇६९२३०̇.

८. ७ ÷ ·१̇४२८५७̇ आणि ·०४२ ÷ ·०३६̇.

संक्षिप्त कृत्यें.

८१. बेरीज वगैरे कृत्यांत कितीही दशांशस्थळें उत्पन्न होत असलीं. तरी व्यवहारांत इतक्या बारकाईचा उपयोग मुळींच होत नाहीं, ह्मणून पाहिजेत तितकेच अंक उपयोगास लावून त्यांवरील अंक सोडून द्यावे लागतात. उदाहरणार्थ तूप, गूळ वगैरे पदार्थांचा दर शेरावर ठरतो, तेव्हां ह्या पदार्थांचें वजन १ पैसाभार किंवा १/९६ शेर ह्यापावेतोंच देतात घेतात, आणि ह्या पदार्थांचा दर पल्ल्यावर ठरतो, तेव्हां ह्यांचें वजन पावशेर किंवा १/४८० पल्ला ह्यापावेतों देतात घेतात. रुपयांची देवघेव १ पै किंवा १/१९२ रुपया ह्यापावेतोंच होते. तशीच पौंडांची देव-

घेव १ फार्दिंग किंवा $\frac{१}{९६०}$ पौंड ह्यापावेतोंच करितां येते. ह्यावरून लक्षांत येईल कीं, उत्तराचा एकं जर तूप, गूळ वगैरे पदार्थांचा शेर असला तर उत्तर शतांशापावेतों पुरें होईल. उत्तराचा एकं जर तूप, गूळ, वगैरे पदार्थांचा पल्ला असला, किंवा रुपया अगर पौंड असला, तर तें उत्तर सहस्रांशापावेतों पुरें होईल. तसेंच उत्तराचा एकं टन असला, व तें उत्तर १ पौंड किंवा $\frac{१}{२२४०}$ टन ह्यापावेतों बारकाव्यानें पाहिजे असलें, तर त्या उत्तरांत चार दशांशस्थळें घेतलीं ह्मणजे पुरे होतील. अर्थात असल्या हरएक उदाहरणांत ह्या आवश्यक स्थलांवरचीं संख्याही निरुपयोगी ह्मणून सोडून दिली पाहिजे.

८२. कसर.—आवश्यक स्थलावरील संख्येचा पहिला अंक जर ४ किंवा त्याहून लहान असला, तर त्या संख्येची किंमत आवश्यक स्थलपरिमाणाच्या अर्धापेक्षां कमी असते, ह्मणून ती संख्या कसर (क्षुल्लक) ह्मणून सोडून देतात. परंतु आवश्यक स्थलावरील संख्येचा पहिला अंक जर ५ किंवा त्याहून मोठा असला, तर त्या संखेची किंमत आवश्यक स्थलपरिमाणाच्या अर्धापेक्षां अधिक असते. अर्धाहून अधिक किंमत सोडल्यापेक्षां अर्धाहून कमी किंमत फाजील घेण्यास चूक कमी होते, ह्मणून त्या संख्येबद्दल १ हातचा कसरेचा ह्मणून आवश्यक स्थलीं मिसळून मग ती संख्या सोडून देतात. उदाहरणार्थ, २·६८४५१ ही संख्या शेरांची असली, तर २·६८ शेर हें उत्तर समजतात. परंतु ही संख्या जर पल्ले, रुपये किंवा पौंड दाखविणारी असली, तर २·६८५ पल्ले, रुपये, किंवा पौंड, हें उत्तर समजतात. येथें आवश्यक स्थलपरिमाणाच्या अर्धापेक्षां कमी संख्या पहिल्या उदाहरणांत सोडून दिली आहे, व दुसऱ्यांत फाजील घेतली आहे. ह्या सोडून दिलेल्या व फाजील घेतलेल्या संख्येला कसर ह्मणतात.

ह्यावरून संक्षिप्त कृत्याचें लक्षण असें होतें कीं, जरूर नसलेल्या स्थलांतून हातचे व कसरेचे हे अंक घेऊन जरूर अस-

लेल्या स्थलापावेतोंच खरें कृत्य करतात, तेव्हां ह्या कामापुरत्या कृत्याला संक्षिप्त कृत्य ह्मणतात.

संक्षिप्त बेरीज व वजाबाकी.

८३. रीति. - दिलेल्या संख्या दशांशाखालीं दशांश, शतांशाखालीं शतांश, अशा मांडून त्यांच्याखालीं आडवी रेघ काढावी आणि त्यांतील आवश्यक स्थलांपुढें उभी रेघ काढावी.

ह्या उभ्या रेघेपुढच्या एक दोन स्थलींच्या अंकांची बेरीज अगर वजाबाकी करून, तींतून हातचे व कसरेचा अंक घ्यावा आणि मग रेघेच्या डावीकडे वहिवाटीप्रमाणें कृत्य करून त्यांतील ते अंक मांडीत जावें. उदाहरणार्थ पुढील कृत्यें पहा.

बेरीज.

२ दशांशस्थलांपावेतों.

३·१४	१५
२७·७८	९७
५४·५६	९८
५४३·७७	६७
६२९·२७	७७
६२९·२८	

वजाबाकी.

४ दशांशस्थलांपावेतों.

५२·३४५६	३४
७·६६६६	६६
४४·६७८९	६८
४४·६७९०	

संक्षिप्त गुणाकार.

८४. रीति.—प्रथम गुण्य मांडावा. गुणाकारांत जितकीं दशांशस्थळें पाहिजे असतील तितकीं स्थळें गुण्यांत चिन्हापासून उजवीकडे मोजून त्या अंकावर खूण करावी.

ह्या खुणेच्या अंकाखालीं गुणकांतील एकं येईल अशा बेतानें गुण्यांकांखालीं गुणकांक उलट मांडावे. गुणकांतले उजवीकडील पूर्णांक गुण्यांकापुढें वाढले, तर त्या गुण्यांकावर शून्यें द्यावीं, आणि शेवटच्या गुणकांकापुढें उभी रेघ काढावी.

नंतर प्रत्येक गुणकांकानें त्यावरच्याच्या उजवीकडील तेढ्या

(तिरप्या) अंकास गुणून, त्या गुणाकारावरचा अंक रेषेपुढें मांडावा, आणि त्यांतील हातचे घेऊन त्यावरील अंकांपासूनचा गुणाकार रेषेच्या डावीकडे मांडावा.

सर्व गुणाकार मांडले ह्मणजे संक्षिप्त बेरजेच्या रीतीनें त्यांची बेरीज घ्यावी, आणि इच्छिलेल्या स्थळीं दशांशचिन्ह करावें.

८५. सूचना. गुणाकार तंतोतंत पाहिजे असला, तर ते-ढ्याच्या गुणाकारांत त्या पलीकडून हातचे आणून ते मिळवीत जावें, अथवा गुणाकारांत एक स्थळ जास्ती उत्पन्न करावें.

उदाहरण. ·९६४७२५३ ह्या संख्येला ६३·८९४२ ह्या संख्येनें गुणून, तो गुणाकार २ दशांशस्थलांपावेतों खरा आणा.

ह्या उदाहरणांतील वहिवाटींतल्या रीतीचा संपूर्ण गुणाकार क. खालीं दिला आहे, आणि वरील रीतीचा कामापुरता किंवा संक्षिप्त गुणाकार ख. खालीं दिला आहे. हे दोन गुणाकार परस्परांच्या तुलनेनें पहा.

क.

·९६४७२५३	
६३·८९४२	
५७८८	३'११८
२८९	४१७'५९
७७	१७८०२४
८	६८२५२७७
	३८५८९०१२
	१९२९४५०६
६१·६४	०३५१२६३२६

ख.

·९६४७२५३	
२४९८३६	
५७८८	३
२८९	४
७७	१
८	६
	४
६१·६४	

८६. उपपत्ति.—गुण्याला गुणकानें त्याखालच्या भारी परिमाणाच्या अंकापासून गुणिलें, तर ते गुणाकार एकेक अंक पुढें सरतसे मांडले पाहिजेत. ह्याप्रमाणें केलेला गुणाकार क. खालीं दिला आहे.

गुणकांतील अंक उलट मांडले, तर ते अंक डाव्या क्रमानें घेऊन त्यांचे गुणाकार क. येथील नमुन्याप्रमाणेंच एकाखालीं एक मांडतां ये-

तील, ह्मणून ख. येथील संक्षिप्त कृतींत गुण्यासाठीं गुणक उलट करून मांडला आहे.

क. खालीं २ दशांशस्थळांपुढें दिलेली उभी रेघ पहा. ह्या रेघेच्या उजवीकडून प्रत्येक गुणाकारांतले हातचे, सर्वांच्या बेरजेंतले हातचे, व येईल तर कसरेबद्दल हातचा, हे कामापुरते अंक घेऊन रेघेमागचें संपूर्ण कृत्य केलें पाहिजे. ह्मणून इतक्या पुरतेच अंक ख. खालच्या संक्षिप्त कृत्यांत उत्पन्न करून मांडले आहेत. ते असेः—

एकंनें ज्या स्थलपरिमाणास गुणावें त्याच स्थलपरिमाणाचा गुणाकार यावयाचा. ह्मणून इष्टस्थलाखालीं एकं (३) मांडून, त्यानें त्यावरच्या (६) ह्या इष्टस्थलांकापासून मागें अंक गुणीत जाऊन, तो गुणाकार उभ्या रेघेच्या डावीकडे दुसऱ्या रांगेंत मांडला आहे.

गुण्यगुणकांतून एकाची पट घेऊन दुसऱ्याचा तितकाच हिस्सा घेतला, तर गुणाकारांत बदल व्हावयाचा नाहीं.— ह्यावरून इष्टस्थलाचा १० वा हिस्सा जे सहस्रांश त्यांना एकंचे १० पट जे दहं त्यांनीं गुणिलें, तर तो गुणाकार इष्टस्थलींचे दशांशच दाखवील. ह्मणून इष्टस्थलापुढच्या सहस्रांशाखालीं दहं मांडून, त्यानें त्यावरच्या (४) पासून डावीकडचे अंक गुणून, तो गुणाकार उभ्या रेघेपासून डावीकडे पहिल्या रांगेंत मांडला आहे. ह्याच रीतीनें राहिलेले अंकांनीं गुणून त्यांचे गुणाकार दुसरी, तिसरी, इ० रांगेंत मांडले आहेत.

इष्टस्थलीं त्यापुढील अंकाच्या गुणाकारांतले हातचे मिळाले पाहिजेत, ह्मणून तेढ्यापुढचा अंक गुणून त्यांतून हातचे घ्यावयाचे असें सांगितलें आहे. इष्टस्थलापुढच्या (ह्मणजे उभ्या रेघेपुढच्या) दुसऱ्या स्थलाच्या बेरजेंतलेही हातचे इष्टस्थलीं येत असतात, ह्मणून तेढ्यापुढील अंकाच्या गुणाकारांतून कसरेसुद्धां हातचे घेण्यास सांगितलें आहे. ह्याप्रमाणें ही संक्षिप्त रीति जरूरीपुरतेंच काम करण्याला सुरेख आहे. गुणाकार तंतोतंत पाहिजे असला, तर हें कृत्य उभ्या रेघेपुढें आणखी १ अंक मांडून करावें ह्मणजे झालें.

संक्षिप्त भागाकार.

८७. रीति १ ली.—भाजकाखालच्या अंकानें भाज्याखालच्या अंकास भाग बसवून, त्या अंकांच्या स्थलपरिमाणांच्या भागाकारावरून त्या पहिल्या भागाचें स्थलपरिमाण शोधावें. नंतर ह्या पहिल्या भागाच्या स्थलपरिमाणापासून इच्छिलेल्या स्थलपरिमाणापावेतों जितके अंक भरतील, तितके अंक भाजकाखालचे ठेवून त्यांवरील अंक कापून टाकावे. अथवा भाजकांत अंक कमी असले, तर त्यांवर शून्यें चढवून पुरे करावे. नंतर ह्या भाजकानें पहिला भाग बसवून, शिल्लक राहिलेले भाज्यावरचे अंक कापून टाकावे, व कमी आल्यास शून्यें देऊन पुरे करावे. अथवाः—

८८. रीति २ री —भाजकांतलें दशांशचिन्ह सारून त्याखालचा भाग बसविण्याचा अंक एकं करावा. ह्या करण्यांत भाजकांतलें दशांशचिन्ह जिकडे जितकीं स्थलें सारावें लागलें असेल तिकडे तितकीं स्थलें भाज्यांतलें दशांशचिन्ह सारावें. नंतर भाज्यांतल्या ह्या चिन्हापुढें इच्छिलेल्या दशांशस्थलाइतकीं स्थलें मोजून, त्या स्थलांकावर खूण करावी. स्थलें कमी असल्यास शून्यें देऊन पुरीं करावीं. ह्या खुणेपावेतों भाज्याला भाग बसविण्याला जेवढा भाजक पाहिजे असेल, तेवढा भाजक कापून घेऊन त्यानें पहिला भाग बसवावा, आणि भाजक अपुरा असला तर बाकीवर खुणेचा अंक घेतला जाईल तोंपावेतों भाग बसवावे.

नंतर बाकीवरतीं भाज्यावरील एक अंक घेऊन भाग बसविण्याबद्दल भाजकावरील एक अंक कापून भाग बसवावा, आणि त्या भागानें कापलेला अंक गुणून त्या गुणाकारांतील कसरेसुद्धां हातचे पुढील गुणाकारांत मिळवून तो गुणाकार वजा करावा. ह्याप्रमाणें शेवटपावेतों करीत जावें.

शेवटचा अंक कापतेवेळची शेवटची बाकी त्या अंकाच्या अर्धापेक्षां अधिक असली, तर शेवटील भाग १ नें वाढवावा, आणि इच्छिलेलीं दशांशस्थलें मोजून त्यामागें दशांशचिन्ह करावें.

उदा. ६१·६४ ह्या संख्येला ·९६४७२५३ ह्या संख्येनें भागून भागाकार ३ दशांशस्थलांपावेतों आणा.

```
·९,'६,४,७,२।५३ ) ६१·६'४००।( ६३·८९४
                  ५७८८३५
                  ·३७५६५
                   २८९४२
                   ·८६२३
                    ७७१८
                    ·९०५
                     ८६८
                     ·३७
                      ३८
```

येथें ९ ह्या दशांशानीं ६१ या एकंना ६चा भाग लागतो.

$\frac{\text{एकं}}{\text{दशांश}} = \frac{\frac{१}{१}}{\frac{१}{१०}} = \frac{१०}{१} =$ दशक,

यास्तव ६ हा पहिला भाग दशकाचा लागतो. ह्या भागाकारांत पूर्णांक २ स्थलें व दशांश ३ स्थलें मिळून ५ स्थळें आणिखीं पाहिजेत, ह्मणून भाजक ५ अंकी कापून घेतला. त्याला पुरा पडण्यासाठीं भाज्य ६ अंकी पुरा करून घेतला, आणि पहिला भाग ६ दशकांचा बसविला. अथवा—

२ ऱ्या रीतीप्रमाणें ९ हें एकं करण्यासाठीं भाजकांतलें दशांशचिन्ह एक स्थळ उजवीकडे सारून, भाज्यांतलेंही दशांशचिन्ह एक स्थळ उजवीकडे सारिलें. त्यापुढें इच्छिलेलीं ३ दशांशस्थलें करून घेतलीं. ह्या ६ अंकी भाज्याला भाग बसविण्याला भाजक ५ अंकी कापून घेतला, आणि त्यानें पहिला भाग ६ दशकांचा बसविला.

नंतर भाग ६ व कापलेला अंक ५ ह्यांच्या गुणाकारांतून कसरेसुद्धां हातचे घेऊन, खालच्या संख्येचा गुणाकार केला आणि तो भाज्यांतून वजा दिला. बाकी ३७५६५ आली. हिजवर नवा अंक घेण्याबद्दल भाजकावरचा एक अंक कापला आणि त्या भाजकानें दुसरा भाग ३ चा बसविला. असा दर वेळेस भाजकांतील एक एक अंक कापून हा संक्षिप्त भागाकार केला.

संक्षिप्त गुणाकारांत जे पोटगुणाकार एका क्रमानें उत्पन्न करून मिळविले होते, त्याच रकमा वरील भागाकारांत त्याच क्रमानें उत्पन्न करून वजा केल्या आहेत, ह्मणून ही कृति व हिची उपपत्ति हीं संक्षिप्त गुणाकाराच्या धोरणानें कळून येतील.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. म.

१. २७·०३५०३५, ३·७६७६, ·२५९६५९६, आणि ·००३४५, ह्यांची बेरीज शतांशापावेतों खरी आणा. आणि ३१५·८५७१४२ व ४७·९५०३७५ ह्यांची वजाबाकी शतांशापावेतों खरी आणा.

२. सहस्रांशापावेतों खरी येईल अशा बेतानें ·०७९५, ६१७·३४८३३, ·८३९१, व २५·८०८०८०, ह्यांची बेरीज करा, आणि ३·१८३५४६ व ·९३६८१ ह्यांची वजाबाकी करा.

३. ·३८५३८५, १९·७७७७७७, ·०५, व ६·७८९७८९७, ह्यांची बेरीज आणि २३·३४५३४५३४ व ७·८८८८८८८ ह्यांची वजाबाकी ह्या ५ दशांशस्थलांपावेतों खऱ्या आणा.

४. ४८०·१४९३६ ह्यांस २·७२४१६ ह्यांनीं गुणा, असें कीं गुणाकारांत दशांशस्थलें ४ येतील.

५ २४९०·३०४८ ह्यांस ०·५७३२८६ ह्यांनीं गुणा, अशा रीतीनें कीं गुणाकारांत दशांशस्थळें ५ येतील.

६ ३२५·७०१४२८ ह्यांस ·७२१८३१९३ ह्यांनीं गुणा, गुणाकारांत दशांशस्थलें ३ पुरे आहेत.

७. १४·४२१३ ह्यांस २·१८१३ ह्यांनीं गुणा, असें कीं गुणाकारांत दशांशस्थलें २ येतील.

८. २८२३·१०३ ह्यांस ३·५६७४ ह्यांनीं गुणा, असें कीं गुणाकारांत १ दशांशस्थल येईल.

९. १११·२३७८ ह्यांस १२·२५३८९७ ह्यांनीं गुणा, गुणाकारांत दशांशस्थल मुळींच नको.

१०. १·२३ × ५·३४ ह्या गुणाकारांत दशांशस्थल १ पुरे.

११. ०·२३४ × ८·७३४; ·०२३४ × ·७८५४; ०·००१ × ·०००९८; १·९९९९ × ·९९९९; ह्या गुणाकारांत दशांशस्थल एक पुरे आहे.

१२. ७८·१३ × ·०००९७; १०० × ·०००१; ह्यांत २ दशांशस्थलें आलीं ह्मणजे पुरे आहेत.

१३. पुढील भागाकारांत ३ दशांशस्थलें येतील असें करा.
१५७·०३८÷७९·६१८; २६·८१४÷७·२९; ३४·०७६÷१८·७२९.

१४. पुढील भागाकारांत दोन दशांशस्थलें येतील असें करा.
७·४१०३६÷२१९·६; ३२·०७९÷६८४५४·७; १३·७२÷४·११६.

१५. पुढील भागाकारांत तीन दशांशस्थलें आणा.
१४·७२३ ÷ ६·१८; २·०९८ ÷ ६३·५७२; १४·०७३ ÷ २·११८.

१६. पुढील भागाकारांत दोन दशांशस्थलें आणा.
·००७१÷·६९३७; ८·१२४७३÷६·२३८९; ·११·२४७÷·८१३७६५.

१७. पुढील भागाकार एक दशांशस्थलापावेतों करा.
३·५६८९÷·२७४३२; ·०१६५४१÷·७११८; ३१·२७५÷·६८५५४.

पुढील उत्तरें अगर (किमती) त्यांत सांगितलेल्या दशांशस्थलांपावेतों खरीं आणा.

१८. $१·०५०६२५^{२}$; $१·०५०६२५^{३}$; $१·०५०६२५^{६}$; हीं प्रत्येक ४ दशांशस्थलांपावेतों आणा.

१९. $१·०३७५^{४}$; आणि $१८७·६२५ \times १·०३७५^{४}$ हीं कृत्यें ५ दशांशस्थलांपावेतों करा.

२०. $१·०४२५^{५}$ आणि $३५७·६ \div १·७४२५^{५}$ ह्यांचीं उत्तरें ४ दशांशस्थलांपावेतों खरीं आणा.

२१. $\frac{३२५·७५}{·०४५}$; $\frac{१}{१·०४५}$; $\frac{३२५·७५}{·०४५}\left\{१ - \frac{१}{१·०४५}\right\}$; हीं ५ दशांशस्थलांपावेतों खरीं आणा.

साधारण प्रश्न.

२२. $\frac{१}{२}\left(६\frac{१}{२} + २\frac{२}{३} - ३\right)$ ह्या पदावलीला दशांशाचें रूप द्या. आणि $·७ + \frac{३}{११}$ चे $·८२५ + ४·१३$ ह्याला व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप द्या.

२३. ($\frac{३}{२५}$ चे $२·४५ - \frac{१}{१००}$ चे ·०२) $\div १०००$ ही पदावली दशांशांत मांडा.

२४. पुढच्या पदावलींत लघुतम कोणता व महत्तम कोणता तें सांगा.

(१) $\frac{२}{३} + \frac{३}{४}$, (२) १·४१४२१, (३) $\frac{१}{२} + \frac{१}{५} + \frac{५}{७}$.

२५ १०·०१ आणि ·००९१ ह्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, व उलटसुलट दोन भागाकार, यांची बेरीज सांगा.

२६. $३२२९·१६ \times १·०४७५^{४}$ ह्यांची सहस्रांशापर्यंत खरी किंमत काढा.

२७. पुढील संख्या महत्त्वाच्या क्रमानें मांडा.

(१) $\frac{३३३}{१०६}$; (२) $३ + \cfrac{१}{७ + \cfrac{१}{१६}}$; (३) ३·१४१५९२६.

२८. १३५३·६ आणि २३१·४८; २९·७५ आणि ११३·९; ३६·७९५ आणि ५७·९८; व ३७६·१०३४ आणि १०८१; ह्यांचे दृढभाजक काढा.

सूचनाः—दिलेल्या संख्यांचीं दशांशस्थलें समान करावीं (नि. ३), नंतर त्या संख्या पूर्णांक समजून त्यांचा दृढभाजक काढावा. आणि त्यांत तितकीं दशांशस्थलें मोजून दशांशचिन्ह करावें. कारण दोन संख्यांचें जें परिमाण असेल, तेंच परिमाण त्यांच्या दृढभाजकाचेंही असावयाचें.

२९. पुढच्या पदावलींचीं सहा दशांशस्थलांपावेतों उत्तरें काढा.

क. $\frac{१}{५} + \frac{१}{५^{२}} + \frac{१}{५^{३}} + \frac{१}{५^{४}} + \cdots$

सूचनाः—पहिलें पद दशांशरूप देऊन मांडावें, नंतर त्याला ५ नीं भागून ती संख्या त्याचेच खालीं मांडावी. अशा क्रमानें इच्छिल्या स्थलांपावेतों खरी किंमत काढावी.

ख. $\frac{१}{७} + \frac{१}{७^{२}} + \frac{१}{७^{३}} + \frac{१}{७^{४}} + \cdots$

ग. $\frac{१}{१०^{२}} \times \left\{ १ - \frac{३}{१०^{२}} + \frac{३ \cdot ४}{१ \cdot २} \cdot \frac{१}{१०^{४}} - \frac{३ \cdot ४ \cdot ५}{१ \cdot २ \cdot ३} \cdot \frac{१}{१०^{६}} \right\}$.

येथें कंसांतील प्रत्येक पदाला दशांशरूप क्रमानें देत जावें.

घ. $१ + \frac{१}{१ \cdot २} + \frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३} + \frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{१}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} + \cdots$

येथें पहिल्या पदाला २ नीं भागून २ रें पद, त्याला ३ नीं भागून ३ रें पद, अशा क्रमानें संख्या उत्पन्न कराव्या.

इ. $\frac{१}{५} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{५^{३}} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{५^{५}} + \frac{१}{७} \cdot \frac{१}{५^{७}} + \frac{१}{९} \cdot \frac{१}{५^{९}} +$ इ०

प्रथम $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{५^{३}}$, $\frac{१}{५^{५}}$ इ० ह्यांचीं दशांशरूपें क्रमानें उत्पन्न करावीं, नंतर ह्यांच्यापासून इच्छिलेल्या पदांचीं रूपें उत्पन्न करून मिळवावीं.

च. $१६ \times \left\{\frac{१}{५} - \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{५^{३}} + \frac{१}{५} \cdot \frac{१}{५^{५}} - \frac{१}{७} \cdot \frac{१}{५^{७}} + \cdots\right\} - \frac{४}{२३९}$.

प्रथमतः कंसांतील १ लें, ३ रें, ५ वें, अशा विषम पदांना दशांशरूपें देऊन तीं मिळवावीं; नंतर २ रें, ४ थें, ६ वें, इत्यादि समपदांना दशांशरूपें देऊन तीं मिळवावीं. नंतर ह्यांच्या अंतराला १६ नीं गुणावें, आणि शेवटीं $\frac{४}{२३९}$ याचें दशांशरूप त्यांतून वजा करावें.

दशांश अपूर्णांकाचा रूपभेद किंवा विविधाशीं संबंध.

८९. पूर्वीं जे व्यवहारी अपूर्णांकाच्या रूपभेदाचे नियम सांगितले, तेच दशांशाला लागू होतात. फरक मिळून इतकाच कीं, व्यवहारी अपूर्णांकाचे छेद प्रत्यक्ष असतात, आणि दशांश अपूर्णांकाचे छेद दशांशचिन्हानें दर्शविलेले असतात.

९०. **प्रकार १ ला.**—दशांशाची हलक्या परिमाणांत किंमत काढण्याचा, आणि त्याला हलक्या परिमाणाचें रूप देण्याचा.

रीति—एकंच्या जागीं त्याच्या बरोबरीची हलक्या परिमाणाची संख्या ठेवावी.

ह्या संख्येनें नुसते दशांश गुणून दशांशचिन्ह केलें, तर त्या दशांशाची पूर्णांकांत किंमत येईल. नंतर त्या संख्येनें पुढचे पूर्णांकही गुणून त्यांत ती किंमत मिळविली, तर त्या एकंदर संख्येला त्या हलक्या परिमाणाचें रूप येईल.

उदाहरण १ लें. १ रुपयाचे ·७५ ह्यांचे पावले करा.

·७५ रु = ·७५ × ४ पा. = ३·०० पा. हें उत्तर.

उदाहरण २ रें. २·६५४ खंडी ह्यांच्या पायली करा. आणि १ दिवसाचे ·५४९६७५ ह्यांचे तास, मिनिटें आणि सेकंद करा.

उदाहरण १ लें.

```
 २·६५४ खं०
    २०
 ─────
 ५३·०८ मण.
    १२
 ─────
६३६·९६ पा. हें उत्तर.
```

उदाहरण २ रें.

```
     ·५४९६७५ दि०
          २४
     ──────
     १३·१९२२.. तास.
          ६०
     ──────
    ७९१·५३२... मिनिटें.
          ६०
     ──────
  ४७४९१·९२.... सेकंद हें उत्तर.
```

उदाहरण ३ रें. १ रुपयाचे ·६̇ आणि ४ खंडींचे ·७̇ ह्यांच्या हलक्या परिमाणांत किमती काय ? खंडी बारुळी समजा.

·६̇ रु. = ६/९ रु.
= २/३ × १६ आ.
= १० २/३ आ.
२/३ आ. = २/३ × १२ पै.
= ८ पै.

```
 ·७̇*
  ४
 ────
 ३·१̇ खं.
  २०
 ────
 २·२̇ म.
  १२
 ────
 २·६̇ पा.
```

∴ उत्तरें { ·६̇ रु. = १० आ. ८ पै आणि
४ खं. चे ·७̇ = ३ खं. २ म. २·६̇ पा.

उदाहरण ४ थें. ३ खं. ४ म. ह्यांचे ·७५ ह्यांची पूर्णांकांत किंमत काढा.

३ खं. ४ म. यांचे ·७५ = ३·२ खं. चे ·७५ = २·४ खं.
व ·४ खं. = ·४ × २० म. = ८·० म.

∴ ३ खं. ४ म. ह्यांचे ·७५ = २ खं. ८ म. हें उत्तर.

उदाहरण ५ वें. ५·३४७९५ टन आणि ·८४४·७९१६̇ पौंड ह्यांच्या पूर्णांकांत किमती काढा.

---

* आवर्त अंकावर तेच अंक जरूरीपुरते कल्पावे, आणि त्यांपासून हातचे व मांडण्याचे आवर्त अंक हे खरे उत्पन्न करून घ्यावे.

५·३४७९५ टन	·८४४७९१६ पौंड.
२०	२०
६·९५९ · · हं. वे.	१६·८९५८३२ · शि.
४	१२
३·८३६ क्का.	१०·७५ पे.
२८	
२३·४०८ पौंड	∴ १६ शि. १०¾ पे. हें उत्तर.
१६	
६·५२८ औंस	
१६	
८·४४८ ड्राम.	

∴ ५ ट. ६ हं. वे. ३ क्का. २३ पौं. ६ औं. ८·४४८ ड्रा हें उत्तर.

९१. प्रकार २ रा.—हलक्या परिमाणाच्या दशांशाला भारी परिमाणाचें दशांशरूप देण्याचा.

रीति.—हलक्या परिमाणाच्या जागीं त्याच्या बरोबरीची भारी परिमाणाची किंमत ठेवावी, किंवा हलक्या परिमाणाच्या दशांशाला तीं परिमाणें त्यावरच्या परिमाणांत जितकीं राहतात त्या संख्येनें भागावें. हा क्रम इच्छिलेल्या परिमाणापावेतों चालवावा ह्मणजे इच्छिलेलें रूप येईल.

उदा. १ लें. ४९३९४·५ रेसांचे रुपये करा.

$$४९३९४·५\text{ रे.} = ४९३९४·५ \times \frac{१}{१००}\text{ पा.} = ४९३·९४५\text{ पा.}$$
$$= ४९३·९४५ \times \frac{१}{४}\text{ रु.}$$
$$= १२३·४८६२५\text{ रु. हें उत्तर.}$$

उदा. २ रें. ३·५ शेर ह्यांच्या खंडी करा, आणि ५ आणे ७॥ पै ह्यांना रुपयाचें दशांशरूप द्या.

१०	३·५ शेर.	१२	७·५ पै.
४	·३५ धडे.	१६	५·६२५ आ.
२०	·०८७५ मण.		·३५१५६२५ रु. हें उत्तर.
	·००४३७५ खं.		

कांहीं उदाहरणांत उतरती व चढती अशा दोन्ही भांजणींची गरज लागते, ह्मणून वरच्या दोन्ही प्रकारच्या रीति योजाव्या लागतात.

उदा. ३ रें. ·२२५ बारुळी खंडीच्या सोळुली खंडी करा.

यांत साधारण परिमाण पायली आहे, ह्मणून बारुळी खंडीच्या पायल्या करून मग सोळुली खंडीच्या पायली केल्या.

·२२५ बा. खं. = ·२२५ × २० बा. म. = ४·५·· बा. म.
= ४·५ × १२ पा. = ५४ पा.
= ५४ × $\frac{१}{१६}$ सो. म. = ३·३७५ सो. म.
= ३·३७५ × $\frac{१}{२०}$ सो. खं.
= ·१६८७५ सो. खं. हें उत्तर.

उदा. ४ थें. ५ फर्लांग १८ पोल ३ यार्ड २ फूट ११·४ इंच ह्यांना १ मैलाच्या, व २$\frac{३}{५}$ मैलांच्या, दशांशांचीं रूपें द्या, आणि ·७८९३६ गिनींना १ पौंडाच्या दशांशाचें रूप द्या.

```
                                        ·७८९३६ गिनी.
                                              २१
१२ | ११·४ इंच.              २० | १६·५७६५६ शि.
 ३ | २·९५ फूट.                    ·८२८८२८ पौं.
     ३·९८३ यार्ड.                        हें २ रें उत्तर.
          २
११ | ७·९६६
४० | १८·७२४ पो.
 ८ | ५·४६८१०६ फ.
     ·६८३५१३२५७ मैल हें १ लें उत्तर.
                ५
१३ | ३·४१७५६६२८७
     ·२६२८८९७१४४·१२२ हें २$\frac{३}{५}$ मै. रूप व २ रें उत्तर.
```

उदा. ५ वें. २ पौं. १५ शि. ९$\frac{१}{२}$ पे. $\frac{३}{५}$ फा. हे १ गिनीचा केवढा दशांश आहेत? आणि ४॥ गिनींचा केवढा दशांश आहेत?

```
    ४ | २·४ फा.          २·६५७̇१४२८५/२ हे एका गिनीचे
   १२ | ९·६ पे.        ९ | ५·३१̇४२८५७̇१
२१ { ३ | ५५·८ शि.         ·५९̇०४७६̇१ हे ४½ गिनींचे.
   { ७ | १८·६
```

उदा. ६ वें. १२ औंस १५ द्राम ह्यांचे दशांशामध्यें त्राय पौंड करा.

```
   १६ | १५ द्रा.
   १६ | १२·९३७५ औंस.
          ·८०८५९३७५ पौं. अवार्डुपाइज.
               ७०००
२४ { ८ | ५६६०·१५६२५· · ·ग्रेन.
   { ३ | ७०७·५१९५३१२५
     २० | २३५·८३९८४३७५ पेनिवेट.
     १२ | ११·७९१९९२१८७५ औंस त्राय.
            ·९८२६६६०१५६२५ पौंड त्राय. हें उत्तर.
```

उदा. ७ वें. १३ शि. ६$\frac{३}{४}$ पे. ह्यांना पौंडाचें दशांशरूप द्या, आणि ८ पौं १३ शि. ६$\frac{३}{४}$ पे. ह्यांचे दशांशांत पौंड करा.

```
 ४ | ३ फा.
१२ | ६·७५ पे.
२० | १३·५६२५ शि.
     ·६७८१२५ पौं
```

६$\frac{३}{४}$ पे. = ६·७५ $\frac{१ \text{ शि.}}{१२}$ = ·५६२५ शि.

१३·५६२५ $\frac{१ \text{ पौं.}}{२०}$ = ·६७८१२५ पौं.

∴ उत्तरें { ८ पौं. १३ शि. ६$\frac{३}{४}$ पे. = ८·६७८१२५ पौं.
१३ शि. ६$\frac{३}{४}$ पे = ·६७८१२५ पौं.

हा रूपभेद रेवांतील निमपटींसारख्या हिस्सेरशीनेंही करितां येतो.

उदा. ८ वें. ३ रूड २६ पोल ह्यांना १ एकराचें दशांशरूप द्या.

१ रूड	१ एकराचा $\frac{१}{४}$ = ·२५	एकर.
	= $\frac{३}{·७५}$	एकर.
३ रूड		
२० पोल	१ रूडचा $\frac{१}{२}$ = ·१२५	,,
४ पोल	१ ,, $\frac{१}{१०}$ = ·०१२५	,,
२ पोल	$\frac{१}{१०}$ रूडचा $\frac{१}{२}$ = ·००६२५	,,
∴	३ रू. २६ पो. = ·८९३७५ एकर हें उत्तर.	

उदा. ९ वें. ३ रूड २६ पो. २८$\frac{१}{२}$ यार्डांना ३ एकर १ पो. ९$\frac{३}{४}$ चौ. यार्डांचें दशांशरूप द्या.

३ रु. २६ पो. २८$\frac{१}{२}$ यार्ड.	१२रु. १ पो. ९$\frac{३}{४}$ यार्ड
४०	४०
१४६ पो.	४८१ पो.
३०$\frac{१}{४}$	३०$\frac{१}{४}$
४४०८$\frac{१}{२}$	१४४३९$\frac{३}{४}$
३६$\frac{१}{२}$	१२०$\frac{१}{४}$
४४४५ यार्ड.	१४५६० यार्ड.

पण $\frac{४४४५}{१४५६०} = \frac{८८९}{२९१२} = \frac{१२७}{४१६} = \frac{१२७}{८·४·१३}$

∴ ८ | १२७
४ | १५·८७५
१३ | ३·९६८७५

·३०५२८८४६१५३ हें इच्छिलेलें रूप झालें

९२. प्रकार ३ रा.—एका देशाच्या परिमाणास दुसऱ्या देशाच्या परिमाणांत न्यावयाचा.

रीति.—सांगितलेल्या परिमाणांचे जातीपैकीं जें परिमाण इच्छिलेल्या परिमाणाचे जातीच्याशीं ताडलेलें असेल, त्या परिमाणांत पहिल्यानें दिलेल्या परिमाणाचें रूपांतर करावें. नंतर त्यास ताडलेल्या परिमाणांत न्यावें; आणि त्यांतून इच्छिलेले परिमाणांत आणावें.

उदा० १ लें. १०॥ आण्यांचा १ शिलिंग समजून १५ रुपयांचे पौंड करा.

१५ रु.
१६
२४० आणे.
४
४२ पैसे { ६ | ९६० पाव आणे.
७ | १६०
२० | २२·८५७१४२ शिलिंग.
१·१४२८५७१ पौंड हें उत्तर.

उदा० २ रें. १·५ अ. १·४ मि. २·५ से. इतक्यांचीं घटिका, पळें करा. १ अ. = २·५ घ.

१·५ अ. १·४ मि. २·५ से. = १·५२४०२७ अ.

१·५२४०२७ × २·५ घ. = ३·८१००६९४ घ.

= ३ घ. ४८ प. ३६ वि.

उदा० ३ रें. खंडी १२॥२॥ धान्याचे विलायती टन करा. पुण्याची एक पायली १। ग्यालन बरोबर आहे. सोळुलें माप.

	खं.	म.	पा.
१२॥२॥ खंडी =	१२	१२	८

= ४०४० पायल्या.

= ४०४० × $१\frac{१}{४}$ ग्यालन = ५०५० ग्यालन.

∴ ५०५० × $\frac{१}{८}$ बु = ६३१·२५ बु.

६३१·२५ × $\frac{१}{८}$ क्वा. = ७८·९०६२५ क्वा.

७८·९०६२५ × $\frac{१}{५}$ टन = १५·७८१२५ टन हें उत्तर.

उदा० ४ थें. वरील उदाहरणावरून पुण्याच्या खंडीशीं विलायती टन ताडून दाखवा.

१२॥२॥ खं = १२॥२·५

= १२·५ खं + ०·१२५ खं.

= १२·६२५ खं.

ह्मणून   १२·६२५ खं. = १५·७८१२५ टन.

∴   १ खं. = $\frac{१५·७८१२५}{१२·६२५}$ टन. = १·२५ टन.

किंवा   १०० खंडी = १२५ टन होतील हें उत्तर.

उदा० ५ वें. २१ शिलिंगांचे $\frac{२}{५}$, एका ग्रोटचे $\frac{३}{४}$ आणि शि. २ पे यांचे $\frac{५}{२}$ यांची बेरीज करून तिला पौंडांचें रूप द्या.

	शि.	पे.
२१ शि. × $\frac{२}{५}$ = $\frac{४२}{५}$ शि. =	८	४·८
१ ग्रो. × $\frac{३}{४}$ = ४ पे. × $\frac{३}{४}$ =	०	३·०
७ शि. × $\frac{५}{२}$ = $\frac{३५}{२}$ शि. =	१७	६·०
२ पे. × $\frac{५}{२}$ = $\frac{१०}{२}$ पे. =	०	५·०
एकंदर १ पौं.	६ शि.	६·८ पे.

इच्छितरूप = १ पौं. ६·५६ शि. = १·३२८३ पौं. हें उत्तर.

उदा० ६ वें. १० मोत्यांचें वजन ३॥ रति आहे. तर ०·३ रुपये एके चवास या भावानें एका मोत्याची किंमत ाय होईल ?

सूचना.—समान मोत्यांचें वजन रतींत घेऊन, त्या रतींच्या ाला $\frac{५५}{९६}$ नीं गुणावें. ह्या गुणाकाराला त्या मोत्यांनीं भाळें ह्मणजे तितक्या मोत्यांचे चव येतात, व मोत्यांचे वर्गानें ागलें ह्मणजे १ मोत्याचे चव येतात (अं. भा. १ क. ८३.)

ार्ता   ३॥ = ३·५

∴   ३·५ × ३·५ = १२·२५

१२·२५ × $\frac{५५}{९६}$ = ७·०२

७·०२ ÷ $१०^{२}$ = ·०७०२ हे एका मोत्याचे चव झाले.

·०७०२ × ·१०·३ रु. = ·७२३०६ रु.

= ११ आ. ६·८२७५२ पै. हें उत्तर.

एका मोत्याची किंमत ·॥≈॥१ सरासरी.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. २.

१. एका पौंडाचे ०·२८१२५ यांची किंमत हलके परिमाणांत काढा.

२. ३ पौं. २ शि. ६ पे. यांचे १·६०५ यांची किंमत हलके परिमाणांत काढा.

३. ३६५।· दिवसांचे २·८१ ह्यांतून $५\frac{५}{९}$ अवरांचे $\frac{३}{४}$ वजा करा.

४. एका चौरस यार्डाचे ४·७५ आणि ७ चौ. फूट यांची बेरीज करा

५. तीन एकरांचे $\frac{७}{९}$ चे $\frac{३}{१४}$ यांतून २·००८७५ चौ. यार्ड वजा करून, बाकींत ३॥· चौ. फुटांचे ·०२२७ हे मिळवा आणि बेरीज सांगा.

६. एका हंड्रेडवेटाचे ०·८५०७६ आणि एका पौंडाचे ०·०७३२५ यांच्या बेरजेस टन यांचें रूप द्या.

७. ०·०२३१ गिनी, यांत अर्ध्या क्रौनचे ०·१९ मिळवा आणि उत्तर गिनींत आणा.

८. ११२ दंड, २ हात यांस कोसांचें रूप द्या.

९. ५॥ गुंजांचे ०·७८५४ यांस तोळ्याचें रूप द्या.

१०. २ दि. ३ अ. हे १ म. १·५ दि. यांचा कितवा अंश आहेत?

११. २५ हातांचे $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{९}$ चे यार्ड किती होतील?

१२. एका चांद्रमासाचें मान २९ दि. ३१ घ. ५०·१२ पळें इतकें आहे. एका वर्षांत ह्मणजे ३६५·२५ दिवसांत चांद्रमास किती पुरे होतील, व वरदिवस किती शिल्लक राहतील?

मध्यममान किंवा सरासरी.

९३. **मध्यममान.**—आपण बाजारांत जाऊन गुळाचा भाव पाहिला तो एका दुकानीं १ रुपयास ८ शेर, दुसऱ्या दुकानीं ८॥ शेर, ३ ऱ्या दुकानीं ७॥ शेर, असा आहे. तर आपण गुळा-

चा भाव सरासरीनें ८ शेर आहे असें ह्मणतों. ह्या **सरासरी-सच मध्यममान** असें ह्मणतात. ह्याचा उपयोग व्यवहारांत आपण नेहमीं करीत असतों.

एका जातीच्या अनेक संख्यांच्या जागीं ज्या संख्येच्या तितक्या आवृत्ति घेतल्या तर त्यांची बेरीज त्या अनेक संख्यांच्या बेरजे इतकी येते, तिला त्या अनेक संख्यांचें **मध्यममान** किंवा **सरासरी** संख्या ह्मणतात. आणि त्या अनेक संख्यांना **स्पष्ट मानें** किंवा **स्पष्ट संख्या** ह्मणतात.

उदाहरणार्थ.—गुळाच्या भावाची सरासरी काढण्याच्या कामांत ८ शेर, ८॥ शेर, व ७॥ शेर ह्या स्पष्ट संख्या आहेत, त्यांचें मध्यमान ८ शेर ही संख्या दाखविते. ह्या उदाहरणावरून अनेक स्पष्ट संख्यांचें मध्यमान कसें काढावें ती रीति उघड दिसून येते. जशीः—

९४ **मध्यममान शोधण्याची रीति.**—स्पष्ट संख्यांच्या बेरजेला स्पष्ट संख्या किती आहेत हें दाखविणाऱ्या संख्येनें भागावें, ह्मणजे तो भागाकार त्या सर्वांचें मध्यममान किंवा सरासरी दाखवील.

उदाहरण १ लें. एका सहाव्या इयत्तेच्या वर्गांत एक मुलगा २० वर्षांचा आहे, ४ मुलगे १८ वर्षांचे आहेत, ८ मुलगे १७॥ वर्षांचे आहेत; आणि १२ मुलगे १६ वर्षांचे आहेत; तर त्या सर्वांचें मध्यम वय काय?

या वर्गांत एकंदर २५ मुलगे आहेत. ह्मणून त्यांचें

$$\text{मध्यम वय} = \frac{\text{२० एकं} + \text{१८ चोक} + \text{१७.५ अठे} + \text{१६ बारीं}}{\text{२५}}.$$

$$= \frac{\text{२०} + \text{७२} + \text{१४०} + \text{१९२}}{\text{२५}} = \frac{\text{४२४}}{\text{२५}} = \text{१६.९६}.$$

उदाहरण २ रें. एका रेलवेस्टेशनाचें माहेवार उत्पन्न खालीं दिलें आहे, त्यावरून त्या स्टेशनाचें दरमहाचें सरासरी उत्पन्न काढा.

जानेवारी	२४५	०१४	०६
फेब्रुवारी	२०१	०१२	०४
मार्च	२८५	०११	०६
एप्रिल	३०५	०२	०११
मे	३४६	०३	०८
जून	४००	०१५	०६
६)	१७८५	०१२	०११
	२९७	०१०	०१$\frac{५}{६}$

उदाहरण ३ रें. एका कुरणांतलें गवत कापण्यास १२ मनुष्यें लाविलीं होतीं. पैकीं ७ जणांनीं दाट जागेंतलें गवत ६३० पेंढ्या एका दिवसांत कापलें. ४ जणांनीं तुरळक जागेंतलें गवत २१० पेंढ्या एका दिवसांत कापलें. आणि एकजणानें त्या सर्वांवर मुकादमी करून त्यांपासून काम घेतलें. ह्यावरून प्रत्येक मनुष्य दररोज किती गवत सरासरीनें कापतो ?

७	जणांच्या पेंढ्या	६३०
४	,, ,,	२१०
१	मुकादमाच्या ,,	०
१२	जणांच्या ,,	८४०

∴ प्रत्येकाच्या सरासरी ,, ७० हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ल.

१. १४, २६, ९, १८, १३, २४, २७, ३९; ह्यांचें मध्यममान काढा.

२. १६००, २७६, ९७४, ०, २३६, ८४५, १२३९; ह्यांचें मध्यममान काय येईल ?

३. तीन शहरांतील लोकांच्या संख्या अनुक्रमें ३४७२९, ४६२३८, आणि ८७२९६, अशा आहेत, तर ह्या प्रत्येक शहरांत सरासरी वस्ती काय आहे ?

४. १५॥०, ३६॥।०, १७$\frac{५}{८}$, ०, १०$\frac{३}{८}$, ७४$\frac{१}{५}$, २८।, आणि ३३ ह्या स्पष्ट संख्यांची मध्यम संख्या सांगा.

५. $१२\frac{१२}{३५}$, − २१, $४९\frac{३}{४}$, ·०३४, $३\frac{१}{१०}$, ०, २४॥, आणि $१२\frac{७}{३०}$ ह्यांची सरासरी काढा.

६. एका शाळेंत सोमवारापासून अनुक्रमें ८०, ९०, ९५, ९२, ८९, ९७ ह्याप्रमाणें मुलें हजर होतीं, तर त्यांची आठवड्याची सरासरी हजिरी सांगा.

७. एका ठिकाणीं उष्णतेचें मान उष्णमापक यंत्रानें मोजलें तें एप्रिलचे ८ वे तारखेस १०१°; १५ वीस १०५°; १९ वीस १०६°; २३ वीस १०८° असें भरलें. तर त्या ठिकाणीं एप्रिल महिन्यांत उन्हाळ्याचें सरासरीनें मान काय आहे ?

८. एका ठिकाणीं ६ वर्षांत पावसाचें मान पर्जन्यमापक यंत्रानें मोजलें तें असें भरलें:—

वर्ष.	मान इंच.	वर्ष.	मान इंच.
१८८९	३४·६४	१८९२	४३·४४
१८९०	३५·७२	१८९३	१९·६५
१८९१	२९·६३	१८९४	३३·९६

तर तेथें सरासरीनें दरवर्षी किती पाऊस पडतो असें ह्मटलें पाहिजे ?

९. एका वर्गांतील ४० मुलांचे वयाचें सरासरीनें मान १३ आहे. त्यांतील २ मुलगे १४ व १७ वर्षांचे गेले व १ मुलगा १० वर्षांचा आला, तर सरासरीचे मानांत काय फरक होईल ?

एकमानगणित.

९५. ३ आण्यांला १२ आंबे मिळतात तर ११ आण्यांला किती येतील ? हें पाहणें झाल्यास आपण पहिल्यानें १ आण्याला किती पडतात हें पाहतों, ते ४ पडतात ह्मणून ११ × ४ = ४४ हें उत्तर ह्मणून सांगतों. हेंच कृत्य आपण एकमानगणितांत करितों.

ह्यांत एकाचे किंमतीवरून किंमती काढावयाच्या असतात, ह्मणून हें एकाच्या आधाराचें गणित आहे असें ह्मटलें पाहिजे.

ह्यानें सारें प्रमाण व संयुक्त प्रमाण (त्रैराशिक व बहुराशिक) हीं न शिकतां हरएक प्रकारचे हिशेब करितां येतात. ह्या कारणान अलीकडे इंग्लंड, फान्स, वगैरे विद्येच्या शिखरास चढलेल्या देशांतील लोक प्रमाणगणिताचे जागीं ह्या एकमानगणिताचाच उपयोग मुख्यत्वेंकरून करूं लागले आहेत. ह्यांच्या नमुन्यानें ह्या गणिताचा प्रचार आपल्याही लोकांत वाढला पाहिजे, आणि ३ ऱ्या इयत्तेपासून ६ व्या इयत्तेपावेतों हें गणित सर्वत्र वापरतां आलें पाहिजे, ह्याकरितां हें प्रकरण ह्या पुस्तकांत प्रमाण गणिताचे पूर्वीं नवीन घालून ह्यांत पुष्कळ प्रकारचीं उदाहरणें शिस्तवार सोडवून दाखविलीं आहेत. ह्यांकडे शिक्षकांनीं व विद्यार्थ्यांनींही अवश्यमेव लक्ष्य पुरवावें.

९६. वर सांगितलेल्या उदाहरणांत जर केवळ ११ आण्यांचे आंबे किती येतील ह्मणून विचारलें असतें आणि त्याला प्रमाण अगर मान कांहीं दिलें नसतें तर उदाहरण करितां आलें नसतें. कारण जरी ११ आण्यांचे आंबे आणण्याची तुमची इच्छा आहे तरी आंबे कोणत्या दराचे हें सांगितलें पाहिजे. जास्ती दराचे आंबे कमी येतील व स्वस्त असतील ते पुष्कळ येतील. तेव्हां तुमचे मनांत कोणत्या दराचे घेणें आहेत तें, ह्मणजे प्रमाण, अगर मान सांगितलें पाहिजे. "३ आण्यांस १२ आंबे," हें आंब्यांचें मान झालें. ह्यांत '३ आणे' हा मानराशि व १२ आंबे हा मानफळ अगर फलराशी असें ह्मणतात. व उत्तर येणारे आंबे यांस इच्छाफळ असें ह्मणतात ह्यांतील इच्छाराशि हा मानराशीची पट दाखविणारा असतो, तसेंच इच्छाफळ हें फलाची तीच पट दाखविणारें असतें, ह्मणून ह्यांना त्या त्या राशींचे इच्छित बदल ह्मणतात किंवा इच्छित विकार ह्मणतात.

मानराशीच्या फलापासून एका मानाचें फळ शोधावें, एका मानाच्या फलापासून अनेक मानांचें फळ शोधावें. मागें सांगितलेल्या मध्यममान गणितांत ज्या स्पष्ट संख्या दिल्या असतात त्या सर्व एकसारख्या असल्या तर येणारें उत्तरही मध्यममान नसून

स्पष्टच येईल. ३ घोड्यांस अनुक्रमें ५०, ६०, ७० रुपये किंमत पडली तर १ घोड्यास सरासरीनें (५० रु. + ६० रु. + ७० रु.) ÷ ३ = ६० रुपये किंमत पडेल असें ह्मणूं. पण त्यांस अनुक्रमें ६०, ६० व ६० अशी किंमत पडल्यास प्रत्येकाची किंमत ६० ही स्पष्ट किंमतच होईल. ह्यावरून पाहतां एकमानगणित हें मध्यममान गणिताचाच एक विशेष प्रकार आहे असें स्पष्ट दिसून येईल. कारण १२ घोड्यांस ७२० रुपये पडतात तर ५ घोड्यांस किती पडतील ? हें उदाहरण एकमानगणितानें करणें झाल्यास आतां सांगितलेल्या रीतीनें पहिल्यानें एक घोड्याची किंमत ६० रु० असें काढून ती वरून ५ घोड्यांची किंमत ३०० रुपये असें काढूं.

एकमानगणितांत सम आणि व्यस्त असे दोन प्रकारच्या संबंधाचे प्रश्न येतात.

९७. सम—४ पैशांला १२ आंबे तर २ पैशांला ६, व ८ पैशांला २४, असे मिळतात. येथें मानाची पट केली कीं फलाची तितकीच पट होते आणि मानाचा हिस्सा केला कीं फलाचा तितकाच हिस्सा होतो. असल्या सरळ संबंधाला किंवा सरळ संबंधाच्या प्रश्नाला सम ह्मणतात.

प्रश्न १ ला.–१२ बैलांना ५४० रुपये पडतात, तर एका बैलाला काय पडेल ?

आतां १२ बैल. = ५४० रु.

∴ १ बैल. $= \frac{५४०}{१२}$ रु. = ४५ रु. हे उत्तर.

ह्या प्रश्नांत १२ बैल हे मान व ५४० रु. हे त्याचें फल आहे. १ बैल हा इच्छाराशि मानराशीचा बद्दल (हिस्सा) आहे आणि त्याची किंमत (रुपयाचा बद्दल) मागितला आहे. ह्यांत मानाचा १२ वा हिस्सा करतांच फलाचा तितक्यावाच हिस्सा झाला, ह्मणून हा संबंध सम होय.

९८. व्यस्त—एक भिंत बांधण्यास ४ मजुरांस २० दिवस लागले तर ८ मजुरांस १० दिवस लागतात व २ मजुरांस ४० दिवस लागतात. येथें मानाची पट केली कीं फलाचा तितकाच

हिस्सा होतो, आणि मानाचा हिस्सा केला कीं, फलाची तितकीच पट होते; असल्या विरुद्ध संबंधाला किंवा विरुद्ध संबंधाच्या प्रश्नाला **व्यस्त** ह्मणतात.

प्रश्न १ रा.–कांहीं काम ७ मनुष्यें १२ दिवसांत करतात, तर १ मनुष्य किती दिवसांत करील ?

येथें ७ मनुष्यांची १२ दिवसांची मेहनत = १ काम.

∴ १ मनुष्याची ८४ ,, ,, = १ काम.

ह्या प्रश्नांत ७ मनुष्यें हें मान, १२ दिवस हें फल, आणि १ मनुष्य हा मानाचा बदल आहे. ह्यांत मान व फल ह्यांचा संबंध काम ह्या राशीशीं गुण्यगुणकाप्रमाणें किंवा अवयवांप्रमाणें आहे. ह्यामुळें मानाचा सप्तमांश केल्यानें फलाची ७ पट होते, ह्मणून हा प्रश्न किंवा हा मानफलांचा संबंध व्यस्त आहे.

सूचना १ ली.—एका प्रश्नांत प्रथम भागाकार व नंतर गुणाकार करणें आला, तर प्रथमतः भाजक छेदस्थलीं मांडून संक्षेप द्यावा, आणि गुणाकार केल्यानंतर भागाकार करावा, ह्मणजे कृत्य सोईनें होतें.

प्रश्न २ रा.–तुपाचा पल्ला (१२० शेर) ह्यांना ८० रुपये पडतात, तर २५ शेरांना काय पडेल ?

१२० शेर = ८० रुपये.

∴ समाप्रमाणें १ शेर = $\frac{८०}{१२०}$ रु. = $\frac{२}{३}$ रु.

तसेंच २५ शेर = $\frac{२}{३}$ रु. × २५ = $\frac{५०}{३}$ रुपये.

= १६ रु. १० आ. ८ पै हें उत्तर.

ह्या प्रश्नांत १२० शेर हें मान, ८० रु० हें फल, आणि २५ शेर ही इच्छा (मानाचा इच्छित बदल) आहे, ह्या राशींच्या संबंधांत मानाचे $\frac{१}{१२०}$ ची २५ पट इच्छा असल्यानें फलाचे $\frac{१}{१२०}$ ची २५ पटच इच्छाफल येतें. अथवा मानाचे $\frac{२५}{१२०}$ पट इच्छाराशि आहे, तर फलाचे $\frac{२५}{१२०}$ पटच इच्छाफल येतें, ह्मणून हा संबंध सम आहे.

प्रश्न ४ था.—२५ कोसांवर पत्र पोंचवून त्याचा जबाब ४ थे दिवशीं (त्वरेनें) आणिल्यास १। रुपया देण्याचा करार आहे. हा जबाब ३ ऱ्या दिवशीं आणिल्यास काय द्यावें ?

जबाब जलद आणण्यांत मेहनत वाढते व काम ही अधिक चांगलें मानलें जातें, ह्याकरितां मजूरीही वाढली पाहिजे. ह्मणून,

जबाब ४ दिवसांनीं आणणें = १। रु.

तर व्यस्तप्र. ,, १ दिवसानें ,, = १। रु. × ४

तसेंच ,, ३ दिवसांनीं ,, = $\frac{१। रु. × ४}{३}$

= १॥≈॥ २ हें उत्तर.

ह्या प्रश्नांत ४ दिवस हें मान असून १। रु. हें फल आहे, व ३ दिवस ही इच्छा आहे. मानाचे $\frac{३}{४}$ पट इच्छा नामक राशि दिल्यानें, फळाचे $\frac{४}{३}$ पट इच्छाफल येतें, अर्थात् हा संबंध व्यस्त आहे.

सूचना २ री.—मान व इच्छा ह्या एका जातीच्या राशीं-मध्यें अनेक परिमाणसंख्या असल्या, तर त्या उतरत्या अगर चढत्या भांजणीनें एकाच नांवाच्या कराव्या; आणि कृत्य वि-विधांत करणें नसलें तर फलांतल्याही परिमाणसंख्या एका नांवाच्या कराव्या, जशा—

प्रश्न ५ वा.—१२ पल्ले ५ पायली तुरींना ८५ रुपये ८ आणे ९ पै पडतात, तर १ पल्ला १० पायली तुरींना काय पडेल ?

ह्या प्रश्नांत १२ प. ५ पा. हें मान व ८५ रु. ८ आ. ९ पै हें फल असून ह्यांचा संबंध सम आहे ह्मणून,

१२ पल्ले ५ पायली = ८५ रु. ८ आ. ९ पै.

ह्मणजे ३६५ पायली = १६४२५ पै.

∴ १ पा. = $\frac{१६४२५}{३६५}$ पै. = ४५ पै.

व ४० पा. = ४५ पै × ४० = १८०० पै.

= १५० आणे.

= ९ रु. ६ आ. हें उत्तर.

प्रश्न ६ वा.—१०० रुपयांचें १ वर्षाचें १२ रुपये व्याज येतें, तर ५५० रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज काय येईल ?

ह्या प्रश्नांत १०० रु. चें १ वर्ष ह्या संयुक्त (दुहेरी) मानाचा संबंध १२ रु. व्या. ह्या फलाशीं सम आहे. ह्मणून,

१०० रुपयांचें १ वर्षाचें व्याज = १२ रु.

तर १ रुपयाचें १ वर्षाचें व्याज = $\frac{१२}{१००}$ रु.

∴ ५५० रुपयांचें १ ,, ,, = ५५० × $\frac{१२}{१००}$ रु. = ६६ रु.

∴ ५५० रुपयांचें ३ वर्षांचें ,, = ६६रु. × ३ = १९८ रु. हें उ.

प्रश्न ७ वा.—एकाचे ६२५ रुपये ८ महिने मजकडे होते, तर ह्याचे बदला किती मुदतीपावेतों ५०० रु. मीं त्याकडे ठेवावे ?

ह्या प्रश्नांत ६२५ रु. चे ८ म. ह्या संयुक्त राशीपैकीं ६२५ रु. हें मान व ८ म. हे फळ झाले आहेत. यास्तव ह्या मानफलांचा संबंध गुण्यगुणकाप्रमाणें व्यस्त आहे. ह्मणून,

६२५ रु. चें ८ म. चें व्याज.

= १ रु. चें ६२५ × ८ म. चें व्याज.

= ५०० रु. चें $\frac{५०००}{५००}$ म. चें व्याज.

= ५०० रु. चें १० म. चें व्याज हें उत्तर.

टीप—हे संबंध वहिवाटीने मनांत भरलेले असल्यामुळें इच्छाफलें आपोआप यथायोग्य निघतात, ह्मणून हे पुढील प्रश्नांत दर्शविले नाहींत; तथापि कोणत्या संबंधाप्रमाणें प्रश्न सुटतो तें बोलून दाखवितां आलें पाहिजे, ह्मणून पुढच्या प्रत्येक प्रश्नांत, प्रश्न ३ व ४ प्रमाणें त्यांतल्या प्रत्येक पायरीस, किंवा प्रश्न ५, ६, व ७, ह्याप्रमाणें प्रश्नाचे आरंभीं हे संबंध विद्यार्थ्यांनीं मनांत आणावे.

प्रश्न ८ वा.—एका दिवाळें काढणाराला ४२८८ रु. कर्ज असून, तो दर रुपयास १० आणे देतो आहे, तर त्याची जिनगी केवढी आहे ?

१ रुपयाचे फेडींत $\frac{१०}{१६}$ रु. देतो,

तर २ रुपयांचे ,, २ × $\frac{१०}{१६}$ रु. देईल.

व ४२८८ ,, ,, ४२८८ × $\frac{१०}{१६}$ रु. देईल.

ह्यावरून त्याची जिनगी २६८ × १० ह्मणजे २६८० रु. किंमतीची आहे. हें उत्तर.

प्रश्न ९ वा.–दर रुपयास ४ पैप्रमाणें इन्कमटाक्स (प्राप्तीवरील कर) देऊन एका मनुष्याला ४५१२ रु. मिळतात, तर त्याचें मूळचें वार्षिक उत्पन्न काय ?

१८८ पै. मिळण्याला प्राप्ति १९२ पै.

∴ १ पै. ,, ,, $\frac{१९२}{१८८}$ पै. = $\frac{४८}{४७}$ पै. = $\frac{४८}{४७ \times १९२}$ रु.

∴ १९२पै.ह्म.१रु. ,, ,, $\frac{४८}{४७} \times \frac{१९२}{१९२}$ रु. = $\frac{४८}{४७}$ रु.

∴ ४५१२ रु. ,, ,, $\frac{४८}{४७}$ रु. × ४५१२ = ४६०८ हें उत्तर.

अपूर्णांकाचे प्रश्न.

प्रश्न १० वा.–एका वस्तूच्या $\frac{३}{७}$ ची किंमत १५०० रु. आहे, तर त्या वस्तूच्या $\frac{४}{५}$ ची किंमत काय होईल ?

$\frac{३}{७}$ वस्तूची किंमत = १५०० रु.

∴ $\frac{१}{७}$,, ,, = $\frac{१५००}{३}$ रु.

∴ १ ,, ,, = $\frac{१५००}{३}$ रु. × ७ = ३५०० रु.

∴ १ वस्तूचे $\frac{४}{५}$ ची ,, = ३५०० रु. चे $\frac{४}{५}$ = २८०० रु.

प्रश्न ११ वा.–६$\frac{३}{४}$ पौंड रुप्याला २४ पौंड ९ शिलिंग ४॥ पेन्स पडतात, तर ३ पौंड ९ औंस १२ पेनिवेट रुप्याला काय पडेल.

२४ पौं. ९ शि. ४॥ पे. = २४ पौं. ९$\frac{३}{८}$ शि. = २४$\frac{९\frac{३}{८}}{२०}$ पौं.

= २४$\frac{१५}{३२}$ पौं. = $\frac{७८३}{३२}$ पौं.

३ पौं. ९ औं. १२ पे.वे. = ३ पौं. ९$\frac{३}{५}$ औं = ३$\frac{९\frac{३}{५}}{१२}$ पौं.

= ३$\frac{४}{५}$ पौं. = $\frac{१९}{५}$ पौं.

आतां. ६¾ पौं. रुप्याची किं. = $\frac{७८३}{३२}$ पौं.

$$\therefore \quad १ \text{ पौं. रु.} \quad ,, = \frac{\frac{७८३}{३२}\text{ पौं.}}{६\frac{३}{४}} = \frac{७८३ \times ४}{३२ \times २७} \text{ पौं.}$$

$$\therefore \frac{१९}{५} \text{ पौं. रु. किं.} = \frac{\overset{२९}{७८३} \times \overset{१}{४} \text{ पा.}}{\underset{८}{३२} \times \underset{१}{२७}} \times \frac{१९}{५} = \frac{५५१}{४०} \text{ पौं.}$$

= १३ पौं. १५ शि. ६ पे. हें उत्तर.

प्र. १२ वा.--एका छावणींत ३००० मनुष्यें असून त्यांना ६४ दिवस पुरेसें अन्न आहे. १५ दिवसांनीं त्यांतून १००० मनुष्यें दुसऱ्या छावणींत धाडलीं, आणि राहिलेल्या प्रत्येक मनुष्याला प्रतिदिवशीं पूर्वी देत असत त्याचे $\frac{७}{८}$ अन्न दिलें तर त्यांना तें अन्न किती दिवस पुरेल?

१५ दिवसांनंतर ३००० म. चें ४९ दि. अन्न होतें.

म्हणजे ,, ,, १००० म. चें. ४९ × ३ ,, ,,

,, ,, २००० म. चें. $\frac{४९ \times ३}{२}$,, ,,

आतां पूर्ण दरानें २००० म. ना, $\frac{४९ \times ३}{२}$ दिव. अन्न पुरतें.

तर $\frac{१}{८}$,, २००० म. ना $\frac{४९ \times ३ \times ८}{२}$,, ,, पुरेल

व $\frac{७}{८}$,, २००० म ना $\frac{४९ \times ३ \times ८}{२ \times ७}$,, ,, ,,

∴ $\frac{७}{८}$ दरानें २००० म. ना. ८४ दिवस अन्न पुरेल हें उत्तर.

प्र० १३ वा.—एका दाणेवाल्यानें १४ रु. दराचे १२ पल्ले, व १० रु. दराचे ८ पल्ले, असे तांदूळ एकत्र करून त्यांपैकीं ६ पल्ले तांदूळ १५ च्या दरानें विकले. ह्या व्यापारांत १० रु. नफा होण्यासाठीं, बाकीचे तांदूळ त्यानें कोणत्या दरानें (पल्ला) विकावे?

१४ रु. दराच्या	१२ पल्ल्यांची		किंमत	= १६८ रु.
१० रु. ,,	८	,,	,,	= ८० रु.
एकंदर	२०	,,	,,	= २४८ रु.
१५ रु. दराच्या	६	,,	,,	= ९० रु.
बाकी	१४	,,	,,	= १५८ रु.

ह्या मिश्रणापासून बाकी १५८ व नफा १० मिळून १६८ रु. उत्पन्न व्हावयाचे आहेत. ह्मणून,

१४ पल्लुच्यांची किंम. = १६८ रु.

तर १ पल्लुच्यांची किं. = $\frac{१६८}{१४}$ = १२ रु. हें उत्तर.

प्रश्न १४ वा.–एका व्यापाऱ्यानें इंग्लंडाहून माल आणविला. त्याच्या किंमतीबद्दल ३००० पौंड आणि बांधणावळीचा व रवानगीचा खर्च ६० पौंड लिहून आला. पैसा देतांना १ शि. १०॥ पेन्सांस १ रु. प्रमाणें पैसा चुकवावा लागला. ह्यांपैकीं $\frac{१}{४}$ माल त्यानें दर रुपयास १ आणा नफा घेऊन विकला आहे. ह्या एकंदर मालावर त्याला ३५७० रु. नफा करणें आहे, तर बाकीचा माल त्यानें दर रुपयास काय नफा घेऊन विकावा?

१ शि. १०॥ पे. किंवा $\frac{१५}{८}$ शि. = १ रु.

∴ १ शि. = $\frac{८}{१५}$ रु.

१ पौं. = $\frac{१६०}{१५}$ रु. = $\frac{३२}{३}$ रु.

सर्व मालाचे ३०६० पौं = $\frac{३२}{३}$ रु. × ३०६०

= ३२६४० रु.

व मालाची $\frac{१}{४}$ ची किं. = ८१६० रु.

तसेंच १ रु. चा नफा = १ आणा.

∴ ८१६० रु चा नफा = ८१६० आणे = ५१० रु.

$\frac{३}{४}$ मालाची किंमत, = ३२६४० रु. चे $\frac{३}{४}$ = २४४८० रु.

व २४४८० रु वरील नफा. = ३५७० रु.–५१० रु. = ३०६० रु.

∴ १ रु. वरील नफा = $\frac{३०६० \text{ रु.}}{२४४८०}$ = $\frac{१}{८}$ रु.

∴ दर रुपयास २ आणे नफा घ्यावा हें उत्तर.

नियमित कालांतल्या कामाविषयीं प्रश्न.

प्र १५ वा–एक काम क ५ दिवसांत करतो, आणि ख १२ दिवसांत करतो, तर ते दोघे मिळून किती दिवसांत करतील?

क ५ दिवसांत १ काम करतो तर दररोज $\frac{1}{5}$ काम करील.
तसेंच ख दररोज $\frac{1}{12}$ काम करील.
आतां, $\frac{1}{5}$ काम + $\frac{1}{12}$ काम = दोघांची १ दिवसाची मेहनत.
ह्मणजे $\frac{17}{60}$ काम = ,, ,, ,,
∴ $\frac{1}{60}$ काम = दोघांची $\frac{1}{17}$ दिवसाची मेहनत.
∴ १ काम = दोघांची $\frac{60}{17}$ दिवसांची ,,
∴ हें काम दोघे मिळून $3\frac{9}{17}$ दिवसांत करतील. हें उत्तर.

प्र० १६ वा.– १ काम क आणि ख ४ तासांत करितात, क आणि ग $3\frac{3}{5}$ तासांत करतात, व ख आणि ग $5\frac{1}{7}$ तासांत करतात, तर तें काम क किती तासांत करील ?

क आणि ख हे ४ तासांत १ काम करतात, तर ते १ तासांत $\frac{1}{4}$ काम करतील.

ह्मणून १ तासाचें काम कचें + खचें = $\frac{1}{4}$
व ,, कचें + गचें = $\frac{1}{3\frac{3}{5}} = \frac{5}{18}$
∴ मिळविल्यानें ,, २ कचें + खचें + गचें = $\frac{1}{4} + \frac{5}{18} = \frac{19}{36}$
परंतु ,, खचें + गचें = $\frac{1}{5\frac{1}{7}} = \frac{7}{36}$
∴ वजा केल्यानें ,, २ कचें = $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$
∴ समाप्रमाणें ,, कचें = $\frac{1}{6}$.

क १ तासांत $\frac{1}{6}$ काम करतो, ह्मणून ६ तासांत पूर्ण काम करील, हें उत्तर.

सूचना.—कचें १ तासाचें काम $\frac{1}{4}$ त वजा दिल्यानें खचें १ तासाचें काम निघतें, व $\frac{5}{18}$ त वजा दिल्यानें गचें एक तासाचें काम निघतें. ह्याही रीतीनें प्रत्येक किती किती तासांत करतो हें काढतां येतें.

प्र० १७ वा.—एका हौदाला ३ नळ्या आहेत. तो हौद पहिलीनें २ तास २० मिनिटांनीं भरतो, दुसरीनें $3\frac{1}{3}$ तासांनीं भ-

रतो, आणि तिसरीनें १ तास ३५ मिनिटांनीं रिकामा होतो ह्यावरून हा हौद रिकामा असतां तिन्ही नळ्या एकदम सोडिल्या, तर किती तासांनीं भरेल ?

२ तास. २० मि. = २$\frac{१}{३}$ ता. = $\frac{७}{३}$ तास.

१ तास. ३५ मि. = १$\frac{७}{१२}$ ता.= $\frac{१९}{१२}$ तास.

पहिली नळी $\frac{७}{३}$ तासांत १ हौद भरते.

तर १ तासांत $\frac{३}{७}$ हौद भरील.

तशीच दुसरी नळी १ तासांत $\frac{२}{७}$ हौद भरील.

व तिसरी नळी १ तासांत $\frac{१२}{१९}$ हौद रिकामा करील

येथें तिन्ही नळ्यांचें १ तासाचें काम =($\frac{३}{७}+\frac{२}{७}-\frac{१२}{१९}$) हौद.

= $\frac{९५-८४}{१३३}$ हौद = $\frac{११}{१३३}$ हौद

∴ तिन्ही नळ्यांचें $\frac{१}{११}$ तासांचें काम = $\frac{१}{१३३}$ हौद.

∴ ,, ,, $\frac{१३३}{११}$ तासांचे ,, = १ हौद.

∴ तिन्ही नळ्यांनीं $\frac{१३३}{११}$ = १२$\frac{१}{११}$ तासांनीं हौद भरेल हें उत्तर.

प्र० १८ वा.—कांहीं काम २४ बायका रोज १० तास खपून १६ दिवसांत करितात, तर ह्याच्या दुप्पट काम किती पुरुष रोज ८ तास खपून १२ दिवसांत करितील ? जेवढें काम ४ बायका एका तासांत करितात तेवढें काम ३ पुरुष एका तासांत करितात.

१ काम १० तासांचे १६ दिवसांत २४ बायका करतात.

तर ,, १ तासाचे १६ ,, २४० ,, करतील.

व ,, १ ,, १ ,, १६×२४० ,, ,

∴ २ कामें १ ,, १ ,, २×३८४०,, ,,

आतां ४ बायकांचे १ तासाचें काम = ३ पुरुषांचें १ ता. काम.

∴ १ बायकोचें ,, = $\frac{३}{४}$ पुरुषाचें ,,

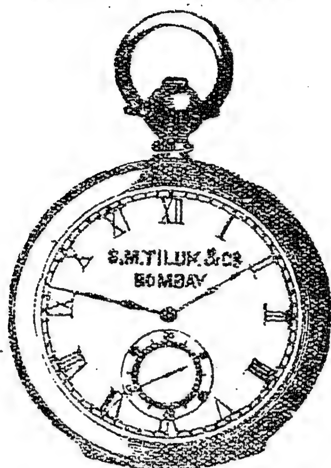
∴ ७६८० बा. चें ,, = ७६८०×$\frac{३}{४}$ पु. ,,

= १९२०×३ पु. ,,

= ५७६० पु. ,,

तसेंच	२ कामें	१ ता.	चें	१ दि.	त	५७६० पु.	करतात.	
तर	,,	८	,,	१	,,	$\frac{५७६०}{८}$ पु.	करतील.	
व	,,	८	,,	१२	,,	$\frac{७२०}{१२}$ पु.	,,	
ह्मणजे	,,	८	,,	१२	,,	६० पु. क.	हें उत्तर.	

घड्याळाच्या कांट्यांविषयीं.



हें घड्याळाचें चित्र पहा.

प्र० १९ वा. – घड्याळाचा मिनिटकांटा व अवरकांटा हे एकमेकांशीं काटकोनांत, १ वाजल्यानंतर केव्हां येतील ?

घड्याळाच्या तबकडीवरील वर्तुळांत लहान भाग ६० केलेले असतात, त्यांस मिनिटें ह्मणतात. हे ५ भाग, अवरकांटा १ तासांत चालतो; तितक्या वेळांत मिनिटांचा कांटा हे ६० भाग चालतो; मिनिटकांटा १२ मिनिटांत १२ भाग चालतो, तेवढ्याच वेळांत अवरकांटा १ भाग चालतो, ह्मणून मिनिटकांटा हा १२ मिनिटांत तासाच्या कांट्यापेक्षां ११ भाग फाजील चालतो.

एक वाजतांना मिनिटकांटा १२ वर असून तासाचा कांटा १ वर असतो. ह्मणजे त्यांच्यामध्यें ५ भागांचें अंतर असतें. ह्यावरून मिनिटकांटा हा तासाच्या कांट्यापेक्षां ५ भाग फाजील चालला ह्मणजे तासाच्या कांट्यावर येईल. ५ + १५ = २० भाग फाजील चालला ह्मणजे त्याशीं पुढच्या काटकोनांत येईल आणि ५ + ४५ = ५० भाग फाजील चालला ह्मणजे त्याशीं मागच्या काटकोनांत येईल.

आतां ११ भाग फाजील चालण्याला १२ मि. लागतात,
तर १ ,, ,, ,, $\frac{१२}{११}$ मि. लागतील,
२० ,, ,, ,, $\frac{१२}{११} \times २०$,, ,,
$= २१\frac{९}{११}$,, एक उत्तर.
आणि ५० ,, ,, ,, $\frac{१२}{११} \times ५०$
$= ५४\frac{६}{११}$,, दुसरें उत्तर.

∴ मिनिटकांटा हा १ वाजल्यावर $२१\frac{९}{११}$ मिनिटांनीं तासाच्या कांट्याच्या पुढच्या काटकोनांत येईल, व $५४\frac{६}{११}$ मिनिटांनीं त्याच्या मागच्या काटकोनांत येईल. हीं उत्तरें.

९९. सूचना १ ली.—मिनिटकांटा हा त्यापासून तासाच्या कांट्यापर्यंतचे मिनिटांचे भाग फाजील चालला ह्मणजे तासाच्या कांट्यावर येतो, व तासाच्या कांट्यापर्यंतचे मिनिटांचे भाग + ३० मिनिटांचे भाग इतके भाग फाजील चालला ह्मणजे त्याच्या समोर येतो, हीं दोन उत्तरें वरच्याच नमुन्यानें विद्यार्थ्यांनीं काढावीं.

१००. सूचना २ री.-मिनिटकांटा चालतो आहे. अवरकांटाही चालतो आहे. मिनिटकांटा दर १२ मिनिटांत १२ भाग चालतो. अवरकांटा तेवढ्या वेळांत १ भाग चालतो. तेव्हां मिनिटकांटा अवरकांट्यापेक्षां तेवढ्या वेळांत ह्म० १२ मिनिटांत ११ भाग फाजील चालतो असें वर दाखविलें आहे. अवरकांटा मुळींच चालला नाहीं असें समजावें ह्मणजे मिनिटकांटा ११ भाग १२ मिनिटांत चालतो असें होतें. अशी कल्पना

केली ह्मणजे घड्याळाचीं सर्व उदाहरणें व पाठलागाचीं सर्व उदाहरणें समजण्यास व करण्यास सोपें जातें. वजाबाकीच्या २ रकमांतून सारखी संख्या वजा केली तरी त्यांचें अंतर बदलत नाहीं. (अं. भा. १ क. १५६) ह्यावरून अशी कल्पना करण्यास कांहीं हरकत नाहीं. वरील उदाहरणांत अवरकांटा मुळींच चालत नाहीं असें कल्पिलें ह्मणजे १२ मिनिटांत मिनिटकांटा ११ भाग चालतो असें धरितां येतें. १ वाजतां अवरकांटा व मिनिटकांटा ह्यांच्यामध्यें अंतर ५ भाग आहे; दोन्ही कांटे काटकोनांत येण्यास १५ भागांचें अंतर पाहिजे ह्मणून अवरकांट्याशीं पुढील काटकोन करण्याला मिनिटकांट्यास १५+५=२० मिनिटें चालावें लागेल व मागील काटकोन करण्यास मिनिटकांटा १० चे आंकड्यांवर आला पाहिजे, ह्मणजे मिनिटकांटा हा अवरकांट्याच्या पुढें ९×५=४५ भाग चालला पाहिजे. हल्लीं तो बारावर आहे, म्हणून त्याला ५+४५=५० भाग चाललें पाहिजे. म्हणून

	११ भाग चालण्यास		१२ मिनिटें लागतात	
∴	१	,,	,, $\frac{१२}{११}$	,, लागतील
∴	२०	,,	,, $\frac{१२}{११}\times२० = २१\frac{९}{११}$	
व	५०	,,	,, $\frac{१२}{११}\times५० = ५४\frac{६}{११}$	

ह्मणजे अवरकांट्याच्या पुढचा काटकोन १ वाजून $२१\frac{९}{११}$ मिनिटांनीं करील व मागचा काटकोन ९ वाजून $५४\frac{६}{११}$ मिनिटांनीं करील. हीं दोन उत्तरें आहेत.

प्र० २० वा.–आमचें घड्याळ दररोज १। मिनिट फाजील चालतें. हें घड्याळ आज १२ वाजतांना २ मिनिटें पुढें होतें, परवां सकाळीं ७ वाजून १० मिनिटांनीं सूर्योदय व्हावयाचा आहे, व तेथून ५ घटिकांनीं मुंजीचा मुहूर्त दिलेला आहे, तर ह्या मुहूर्ताच्या वेळीं हें घड्याळ केवढा काल दाखवील ?

आपल्या खासगी व्यवहारांत एका सूर्योदयापासून दुसऱ्या सूर्योदयापावेतों स्पष्ट दिवस (म्ह. वार) मोजतात, परंतु सरकारी

कामांत एका मध्यरात्रीपासून दुसऱ्या मध्यरात्रीपावेतों घड्याळानें दाखविलेल्या २४ तासांच्या कालाला मध्यम दिवस (म्ह. वार व तारीख) म्हणतात.* ह्या रीतीनें इष्ट कालापावेतों घड्याळ चालण्याचे तास मोजतां आजचे १२, उद्यांचे २४, व परवांचे ७ तास १० मिनिटें + २ तास, मिळून ४५$\frac{१}{६}$ तास भरतात. ह्या घड्याळाची,

२४ तासांतली फाजील चाल = ७'५ से. चे भाग

∴ १ ,, = $\frac{७५}{२४}$ से.

∴ ४५ ,, = $\frac{७५}{२४}$ × ४५ से.,,

= २ मि. २०$\frac{५}{८}$ से.,,

व $\frac{१}{६}$,, ,, = $\frac{७५}{१४४}$ = $\frac{१}{२}$ से. सु.

पूर्वींची = २ मि.

∴ एकंदर ,, = ४ मि. २१ से.

∴ हें घड्याळ मुहूर्ताचे वेळीं ९ तास १४ मि. २१ सेकंद दाखवील हें उत्तर.

पाठलागाविषयीं.

प्र० २१ वा.-एका जाळीपासून त्याच्या ६० उड्यांइतका दूर ससा जातांक्षणींच त्या जाळीशीं कुत्रा आला. सशाच्या ५ उड्यांच्या कालांत कुत्र्याच्या ४ उड्या होतात, आणि सशाची उडी २ यार्डांवर पडत असून कुत्र्याची उडी ३ यार्डांवर पडते, तर त्या जाळीपासून कितव्या उडीस तो कुत्रा सशाला धरील ?

सशाच्या उड्या ६० = ६० × २ यार्ड = १२० यार्ड अंतर.

कुत्र्याच्या ४ उड्यांचा काल = सशाच्या ५ उड्यांचा काल

∴ कुत्र्याच्या १ उडीचा काल = सशाच्या $\frac{५}{४}$ उड्यांचा काल.

∴ कुत्र्याच्या ३ यार्डांचा काल = सशा. $\frac{५}{४}$ × २ यार्डचा काल.

= २$\frac{१}{२}$ यार्ड चालीचा काल.

---

* हल्लीं आगगाडीकडे १ ते २४ तासपर्यंत मोजतात. रात्रीचे दोन व दिवसाचे दोन वाजले असें न ह्मणतां दोन व चौदा वाजले असें अनुक्रमें ह्मणतात.

आतां $\frac{१}{२}$ यार्ड अंतर तोडण्यास कुत्र्याची १ उडी लागते, तर १ यार्ड अंतर तोडण्यास कुत्र्याच्या २ उड्या लागतील. व १२० ,, ,, ,, कुत्र्याच्या २४० उड्या लागतील हें उत्तर.

अथवा

सशाची १ उडी = २ यार्ड ∴ ६० उड्या = ६०×२ यार्ड = १२० यार्ड हें जाळीपासून सशाचें अंतर.

सशाच्या ५ उड्या = ५×२ यार्ड = १० यार्ड.

कुत्र्याच्या ४ उड्या = ४×३ यार्ड = १२ यार्ड.

ह्यावरून कुत्रा ४ उड्यांत सशाच्या पुढें २ यार्ड जातो ∴ १ उडींत $\frac{२}{४}$ यार्ड = $\frac{१}{२}$ यार्ड पुढें जातो. आतां सूचना २ प्रमाणें आपण ससा चालत नाहीं असें मानिलें तर कुत्रा १ उडींत $\frac{१}{२}$ यार्ड जातो असें होतें. ह्मणून २ उड्यांत १ यार्ड जातो. ∴ १२० यार्ड जाण्याला त्यास २×१२० = २४० उड्या माराव्या लागतील. हें उत्तर.

संयुक्त प्रश्न.

प्र० २२ वा.–१२ नांगर ६ दिवसांत ९६ एकर जमीन नांगरतात, तर किती नांगर ८ दिवसांत ६४ एकर जमीन नांगरतील ?

६ दिवसांत ९६ ए. नांगरण्यास १२ नांगर लागतात,
तर १ ,, ९६ ए. ,, ६ × १२ ,, लागतील.
व १ ,, १ ए. ,, $\frac{६ \times १२}{९६}$,, ,,
∴ ८ ,, १ ए. ,, $\frac{६ \times १२}{८ \times ९६}$,, ,,
∴ ८ ,, ६४ ए. ,, $\frac{\cancel{६४} \times ६ \times \cancel{१२}}{\cancel{८} \times \cancel{९६}} = ६$

∴ ६ नांगर लागतील, हें उत्तर.

प्र० २३ वा.-३५ पायली चणे ७ घोड्यांना १० दिवस पुरतात, तर ९६ पायली चणे १८ घोड्यांना किती दिवस पुरतील ?

	३५ पा. च.		७ घोड्यांना		१०	दिवस	पुरतात.
तर	१	”	७	”	$\frac{१०}{३५}$	”	पुरतील.
व	१	”	१	”	$\frac{१०}{३५} \times ७$	”	”
∴	९६	”	१	”	$\frac{१० \times ७ \times ९६}{३५}$		”
व	९६	”	१८ घोड्यांना		$\frac{\overset{२}{\cancel{१०}} \times \cancel{७} \times \overset{१६}{\cancel{९६}}}{\underset{\cancel{७}}{\cancel{३५}} \times \underset{३}{\cancel{१८}}}$	”	”

∴ $१०\frac{२}{३}$ दिवस पुरतील, हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. व.

१. १७ पौं. साखरेला ८ शि. ६ पे. पडतात, तर १ पौंडाला काय पडेल ?

२. एका मनुष्यानें ६२ कोसांची मजल ४ दिवसांत केली, तर तो दररोज किती चालला ?

३. एक गोणताभर धान्य ९ मनुष्यांना ३४ दिवस पुरतें, तर तें एका मनुष्याला किती दिवस पुरेल ?

४. २६५ पौंड. प्राप्तीवर ६ पौंड. १२ शि. ६ पे. इन्कमट्याक्स (उत्पन्नावरील कर) आकारतो, तर दर पौंडावर काय बसला ?

---

५. एक मनुष्य ४ दिवसांत ६२ कोस चालतो, तर तो किती दिवसांत ९३ कोस चालेल ?

६. एक शेत १२ मनुष्यें ४ दिवसांत कापतात, तर तें ३२ मनुष्यें किती दिवसांत कापतील ?

७. ७ शेर काफीला ७ रु. ९ आ. ४ पै पडतात, तर ६३ शेरांना काय पडेल ?

८. १५ पौंड साखरेला ५ शि. $७\frac{१}{२}$ पे. पडतात, तर १ हंड्रेडवेट साखरेला काय पडेल ?

---

९. एक काम १५ मनुष्यें २० दिवसांत करितात, तर तें १२ दिवसांत करण्यास किती मनुष्यें लागतील ?

१०. १७ एकर जमिनीचा मक्ता ५९ पौं. १० शि. पडतो, तर ८६ एकर जमिनीस काय पडेल ?

११. ६ ग्रेन रुप्याला ५ फार्दिंग पडले, तर एका क्रौनाचें रुपें किती येईल ?

१२. ४ वार फ्लानेलीला ३॥।-।१ पडले, तर ५७ वार फ्लानेलीला काय पडेल ?

१३. एका दिवाळखोराची जिनगी रु. २१५ किंमतीची असून त्याला १०७५ रु. कर्ज आहे, तर त्याच्या फेडींत तो दर रुपयास काय देईल ?

अपूर्णांकाविषयीं.

१४. एका इस्टेटीच्या $\frac{३}{५}$ ची किंमत ७५२० रु. आहे, तर तिच्या $\frac{५}{८}$ ची किंमत काय ?

१५. एका गृहस्थाची एका जहाजाच्या $\frac{३}{८}$ वर मालकी आहे. त्यानें आपल्या मालकीचे $\frac{२}{३}$ हे १२६० पौंडाला विकले, तर त्या जहाजाची किंमत काय ?

१६. एका कारखान्याच्या $\frac{३}{१४}$ वर एकाची मालकी आहे, त्यानें आपल्या मालकीच्या $\frac{२}{७}$ चा $\frac{१}{३\frac{१}{५}}$ हा हिस्सा $१२०\frac{५}{८}$ पौंडांना विकला आहे. ह्या दरानें ह्या कारखान्याच्या $\frac{१}{५}$ च्या $\frac{३}{१०}$ ची किंमत काय आहे ?

१७. १५·५ हंड्रेडवेट माल ६० मैलांवर नेण्याला ७ शि. ९ पे. भाडें दिलें आहे. ह्या भाड्यांत ३·२५ हंड्रेडवेट माल केवढ्या लांबीवर नेला जाईल ?

१८. ८॥ इंच लांबीच्या मेणबत्त्या ६ आण्यांत अर्धा डझन मिळतात. ह्याच जाडीच्या व १०। इंच लांबीच्या मेणबत्त्या ७ आणे ४ पैसा अर्धा डझन मिळतात, तर ह्यांतल्या कोणत्या मेणबत्त्या घेण्यांत नफा आहे ?

काल व काम ह्यांविषयीं.

१९. एक काम क ६ तासांत करितो आणि ख ९ तासांत करितो, तर ते दोघे मिळून तें काम किती तासांत करतील ?

२०. नेमलेलें कांहीं एक काम करण्याला कला ३५ दिवस लागतात, आणि गला ४१ दिवस लागतात, तर त्या दोघांना मिळून किती दिवस लागतील ?

२१. नेमलेलें शेत क आणि ख मिळून ३ दिवसांत कापतात, क आणि ग मिळून ३$\frac{१}{३}$ दिवसांत कापतात, ख आणि ग मिळून ४ दिवसांत कापतात, तर ते तिघे मिळून किती दिवसांत कापतील ?

२२. एका हौदाला ३ नळ्या असून त्यांनीं अनुक्रमें ६, ८, व १२ मिनिटांनीं तो हौद भरतो, तर ह्या तिन्ही नळ्या एकदम सोडल्या असतां तो हौद किती वेळांत भरेल ?

२३. कनें १४ दिवसांत एका कामाचे $\frac{७}{१०}$ केले, आणि मग खच्या मदतीनें तें काम २ दिवसांत पुरें केलें, तर हें काम एकटा ख किती दिवसांत करील ?

२४. एक काम क ३ तासांत करितो, ख आणि ग मिळून ह्याच्या निमे वेळांत करतात, व क आणि ग मिळून १$\frac{१}{३}$ तासांत करतात, तर तें काम एकटा ख किती वेळांत करील ?

२५. एक काम अ २७ दिवसांत करितो आणि ब १५ दिवसांत करितो. ह्या कामीं अ १२ दिवस खपला, नंतर ब ५ दिवस खपला, आणि मग तें काम कनें ४ दिवसांत पुरें केलें. ह्यावरून हें काम एकट्या कनें किती दिवसांत केलें असतें ?

२६. एक हौद वरच्या २ नळ्यांनीं अनुक्रमें १८ आणि २० मिनिटांत भरतो आणि खालच्या तोटीनें ४० मिनिटांत रिकामा होतो. आतां त्या २ नळ्या व ती तोटी हीं एकदम सोडिलीं, तर तो हौद १० मिनिटांत किती भरेल ?

घड्याळाविषयीं.

२७. घड्याळाचे कांटे पुढच्या तासांमध्यें एकावर एक केव्हां येतील ?

४ व ५, ६ व ७, ९ व १०.

२८. घड्याळाचे कांटे खालीं दिलेल्या तासांमध्यें एकमेकांशीं काटकोनांत केव्हां येतील ?

४ व ५, ७ व ८, ११ व १२.

२९. पुढील तासांच्या दरम्यान घड्याळाचे कांटे एकमेकांसमोर केव्हां येतील ?

१ व २, ४ व ५, ८ व ९.

साधारण प्रश्न.

३०. ठरलेल्या भाड्यांत १२०० पौंड ओझें ३६ मैलावर नेलें जातें, तर २४ मैलांवर किती पौंड ओझें नेलें जाईल ?

३१. २० औंस १९ पेनिवेट २$\frac{२}{३}$ ग्रेन वजनाच्या पेल्याला ५ पौंड १५ शि ३ पे. पडले, तर दर औंसास काय पडेल ?

३२. १ पौंड १० औं. भार चमच्यांची किंमत काय होईल ? प्रत्येक ३॥। औंस वजनाचा अशा एक डझन चमच्यांना १२ पौंड १० शि. प्रमाणें दर आहे.

३३. एक मनुष्य ३५ दिवसांत १५$\frac{२}{५}$ रु. प्रमाणें खर्चून सालिना १०० रु शिल्लक पाडितो, तर त्याचें सालिना उत्पन्न काय ?

३४. एक मनुष्य दररोज ६ तास चालून २४ दिवसांत ५४० मैल जातो, तर तो दररोज ८ तास चालून ३ दिवसांत केवढी मजल करील ?

३५. १० घोडे व १३२ मेंढ्या ह्यांना ८ दिवसांत ५० पौंड १० शि. खर्च लागतो, तर १५ घोडे व १४८ मेंढ्या ह्यांना तितक्याच दिवसांस काय खर्च लागेल ? ५ घोड्यांचें खाणें ८४ मेंढ्यांना तंतोतंत पुरतें असें घ्या.

३६. २१०० शिपायांच्या फौजेला ९ महिने पुरेशी अन्नसा-

मुग्री आहे. ह्या फौजेच्या मदतीला ६०० शिपाई आणखी आणिले, तर ही सामुग्री किती मुदतीपावेतों पुरेल ?

संयुक्त प्रश्न.

३७. ८ मनुष्यें ७ दिवस खपून ४० एकरांवरचें गवत कापितात, तर २४ मनुष्यें २८ दिवस खपून किती एकरांवरचें गवत कापितील ?

३८. ८ मनुष्यांची ५ दिवसांची मजुरी १२ रुपये पडते, तर ३२ मनुष्यांची २४ दिवसांची मजुरी काय पडेल ?

३९. ९३९ शिपायांच्या पलटणीला ३५१ कार्टर गहूं १६८ दिवस पुरतात, तर १४०४ कार्टर गहूं ५६ दिवसांपावेतों किती शिपायांना पुरतील ?

४०. एक मनुष्य १२ तासांच्या ५ दिवसांत १५० मैल चालतो, तर तो १० तासांच्या किती दिवसांत ५०० मैल चालेल ?

४१. ३ रुपये ४ आणे देऊन ग्यासाचे ५ दिवे रोज ५ तासप्रमाणें १० दिवस लावितां येतात, तर ३८ रुपये ४ आणे देऊन ग्यासाचे किती दिवे रोज ४ तासप्रमाणें १५ दिवस लावितां येतील ?

४२. ३ फिरस्त्यांच्या टोळीला ३८० रुपये ४ आठवडे पुरतात, तर ५ फिरस्त्यांच्या टोळीला ९५० रुपये किती दिवस पुरतील ?

४३. ३०० पेट्या दारू ही ४४ तोफांना, तासास ३० सरबत्त्यांप्रमाणें ३ तासांचे ५ दिवस पुरते, तर ४०० पेट्या दारू ६६ तोफांना, तासास ४० सरबत्त्यांप्रमाणें ५ तासांचे किती दिवस पुरेल ?

४४. ३ महिन्यांनीं ५०० रुपये, ७ महिन्यांनीं २०० रु. आणि २ महिन्यांनीं २५० रु. द्यावयाचे आहेत; तर एकदम सर्व रक्कम देणें झाल्यास ती केव्हां द्यावी ?

गुणोत्तर.

१०१. व्यवहारांत आपल्यासमोर कोणताही पदार्थ येवो,

आपण त्याला लागलाच त्याच्या जातीच्या दुसऱ्या पदार्थाशीं ताडून पाहतों. ताडून पाहण्याचे दोन प्रकार आहेत. एक, अंतरानें आणि दुसरा, पटीनें.

आमच्या घराची भिंत तुमच्या घराच्या भिंतीपेक्षां ५ फुटांनीं उंच आहे असें सांगतों, अथवा दीडपट उंच आहे असें सांगतों. या दोन्ही सांगण्यांत दुसऱ्या भिंतीची उंची पहिल्या भिंतीचे उंचीचे संबंधानें सांगितली गेल्यामुळें तिच्या वास्तविक मोठे-पणाचें ज्ञान पहिल्या भिंतीच्या मोठेपणावर अवलंबून असतें. त्या दोन्ही भिंतींचें वास्तविक ज्ञान होण्यास त्या दोहींनाही एका माहितींतले मानाशीं ताडून पहावें लागतें. एक भिंत १० फूट आणि दुसरी १५ फूट असली, तर पहिलीपेक्षां दुसरी भिंत ५ फूट उंच आहे, किंवा दुसरी पहिलीच्या दीडपट उंच आहे, असें ह्मटल्यानें दोन्ही भिंतींचा मोठेपणा चांगला लक्षांत येतो.

ह्या दुसऱ्या प्रकारांत १० फूट ह्या मापानें १५ फूट मोजले आहेत, ह्मणून १० फुटांना मान व १५ फुटांना त्याची पट अ-शीं नांवें येतात. फूट हें ह्या राशीचें आद्य परिणाम आहे.

सर्व प्रकारचीं आद्य परिमाणें ठरविलेलीं आणि लोकांच्या माहितींतलीं असतात. या आद्य मानांच्या संबंधानें सर्व प्रका-रचीं मानें सांगितलेलीं असतात. हीं सर्व महत्त्वदर्शक परिमाणें संख्यांनीं दाखविलीं जातात.

चार हात उंची, किंवा पांच बिघे क्षेत्र, किंवा सहा तोळे व-जन, किंवा दोन दिवसांची मजल, या शब्दांचा अर्थ बरोबर समजण्यास एक हात उंची, एक बिघा क्षेत्र, एक तोळा वजन किंवा एक दिवसाची मजल, यांचें ज्ञान आपणास पूर्वी बरोबर झालेलें आहे असें घेऊन चालावें लागतें.

अंतरानें फरक दाखविणें आणि पटीनें फरक दाखविणें, या दोहोंत जो भेद आहे तो चांगला समजून घेतला पाहिजे. एका हौदांत दररोज ८ घागरी पाणी यावयाचें त्याबद्दल एके दिवशीं त्यांत दोन घागरी अधिक पाणी आलें आणि दुसरे दिवशीं त्यांत

चार घागरी अधिक पाणी आलें, तर हौदांत दुसरे दिवशीं दुप्पट पाणी अधिक आलें ही गोष्ट खरी आहे. परंतु हौदांतलें पाणी दुप्पट झालें नाहीं. तें पहिले दिवशीं सवाईनें झालें आणि दुसरें दिवशीं दिढीनें झालें. कालच्यापेक्षां उष्मा हवेंत आज दुप्पट आहे असें ह्मटलें, तर हवा दुप्पट गरम झाली असें समजूं नये. सावकाराला कालच्यापेक्षां आज दुप्पट नफा झाला असला, तरी त्याची दौलत दुप्पट झाली असें समजूं नये.

१०२. एका इसमाजवळ २ रुपये दिले; त्यानें ६ शेर साखरेचा पुडा आणिला. दुसऱ्या इसमाजवळ ८ रुपये दिले; त्यानें २४ शेर साखरेचा पुडा आणिला.

२ रुपये व ८ रुपये ह्यांत मोठेपणाचे संबंधानें तुलना केली ह्मणजे २ रुपयांच्या ४ पट ८ रुपये आहेत. त्याप्रमाणेंच ६ शेरांच्या ४ पट २४ शेर आहेत. ह्या ४ पटीला अथवा कितीपट हें दाखविणाऱ्या ४ ह्या संख्येला **गुणोत्तर** ह्मणतात.

२ ह्यांची ६ हे तिप्पट आहेत व ८ ह्यांची २४ हेही ३ पट आहेत. परंतु २ व ६; तसेंच ८ व २४ हे सजातीय नाहींत. कारण २ व ८ हे रुपये आहेत व ६ व २४ हे शेर आहेत. ह्मणून २ रुपयांची ६ शेरांशीं अथवा ८ रुपयांची २४ शेरांशीं पटीचे संबंधानें तुलना करितां येत नाहीं. ह्मणून वरील उदाहरणांत तीन अगर ३ पट ह्यास गुणोत्तर ह्मणतां येत नाहीं. तेव्हां

एका जातीच्या दोन राशींची तुलना केली तर पहिला दुसऱ्याचे कितीपट आहे अगर दुसरा पहिल्याचे कितीपट आहे हें दाखविणारा जो दोन राशींचा परस्परसंबंध त्याला **गुणोत्तर** ह्मणतात.

ज्या दोन सजातीय राशींची गुणोत्तराकरितां आपण तुलना करितों त्यांस गुणोत्तराचीं पदें अथवा गुणोत्तराचें युग्म (जोडी) असें ह्मणतात. वरील उदाहरणांत २ रुपये, ८ रुपये; ६ शेर, २४ शेर हीं चार ह्या गुणोत्तराचीं पदें अथवा युग्में आहेत. २

रुपये व ६ शेर ह्या पहिल्या पदांस *अग्रसर ह्मणतात, व ८ रुपये व २४ शेर ह्या दुसऱ्या पदांस उपाग्रसर ह्मणतात. २ रुपये अथवा ६ शेर हें मान (माप) धरून आपण ८ रुपये अथवा २४ शेर ह्यांचा मोठेपणा मोजतों, ह्मणून २ रुपये व ६ शेर ह्यांस मान व दुसरीं पदें अथवा उपाग्रसर हीं मानांची पट दाखवितात, ह्मणून त्यांस पट (गुण) अशीं नांवें देणेंही योग्य आहे.

१०३. लेखन.—दोन राशींचें गुणोत्तर हें त्या राशींमध्यें : अशीं दोन टिंबें देऊन मांडितात.

जसें ३ शेरांस : ६ शेर अथवा $\frac{६ \text{ शेर}}{३ \text{ शेर}}$

४ : ५ किंवा $\frac{५}{४}$.

१०४. वाचन.—वरील गुणोत्तरें 'जसे ३ शेरांस ६ शेर' असें मराठींत वाचतात व जसे '३ शेर ६ शेरांस' असें इंग्रजींत वाचतात. मराठी वाचणींत ३ शेर हा मानराशि होतो ह्मणून ३ शेर : ६ शेर हें गुणोत्तर मराठी वाचणीप्रमाणें $\frac{६ \text{ शेर}}{३ \text{ शेर}}$ हा अपूर्णांक दाखवितो. इंग्रजी वाचणींत ६ शेर हा मान राशि होतो ह्मणून, तेंच गुणोत्तर $\frac{३ \text{ शेर}}{६ \text{ शेर}}$ हा अपूर्णांक दाखवितो; हे दोन्ही अपूर्णांक एकमेकांचे व्युत्क्रम ह्मणजे उलट आहेत, ह्मणून मराठी वाचणीचे गुणोत्तराला दक्षिण ह्मटलें तर इंग्रजी गुणोत्तराला वाम ह्मणावें; त्याचप्रमाणें मराठी वाचणीचे गुणोत्तराला सम ह्मटलें तर इंग्रजी वाचणीचे गुणोत्तरास व्यस्त ह्मणावें.

जितके 'सहा शेरांस तीन शेर' ही मराठी वाचणी इंग्रजी वाचणीच्या अर्थाची आहे. ह्मणून ती $\frac{६ \text{ शेर}}{३ \text{ शेर}}$ ह्या अपूर्णांकानें दाखविली जाते.

---

* अग्रसर व उपाग्रसर ह्यांस इंग्रजींत अनुक्रमें आंटिसीडेंट (Antecedent) व कान्सिकेंट (Consequent) ह्मणतात. मान व पट हीं नांवें जुन्या संस्कृत ग्रंथांत आढळतात.

१०५. विशेष.—गुणोत्तराचे संबंधानें कितीएक गोष्टी लक्षांत ठेविल्या पाहिजेत त्या अशाः—

क—मान राशीची पट त्या मान राशीच्याच जातीची असावयाची. ह्यावरून गुणोत्तरांचीं पदें ३ फूट : ६ यार्ड अशीं भिन्न परिमाणांचीं असलीं तर तीं ३ फूट : १८ फूट अशीं एकाच परिमाणाचीं करून घेतलीं पाहिजेत. ३ फुटाच्या अमुक पट ६ तास आहेत असें ह्मणतां येत नाहीं, म्हणून गुणोत्तराचीं पदें भिन्न जातींचीं असतां कामाचें नाहीं.

ख.—राशींचें युग्म किंवा गुणोत्तर हें त्या राशींतील संख्यांचा भाववाचक अपूर्णांक दाखवितें, ह्यावरून "६ शेर : ३ शेर" ह्या युग्माचे जागीं मराठी गुणोत्तर वापरणाराला $\frac{3}{6}$ घेतां येतील, इंग्रजी गुणोत्तर वापरणाराला $\frac{6}{3}$ घेतां येतील, आणि ह्या कोणत्याही गुणोत्तराचे जागीं "६ शेर : ३ शेर" हें मूळचें युग्मही घेतां येईल.

गुणोत्तरें अपूर्णांकांनीं दाखविलीं जातात, ह्मणून अपूर्णांकांच्या अंशछेदांसंबंधीं सर्व नियम गुणोत्तरांच्या **गुण** (अंश) **व मान** (छेद) ह्या पदांना लागू होतात.

ग.—गुणोत्तराचीं पदें **गुण** (अंश) आणि **मान** (छेद) ह्यांना एकाच संख्येनें गुणलें किंवा भागलें, तर त्या गुणोत्तरांत बदल होत नाहीं. जसें. ६ शेर : ३ शेर = १८ शेर : ९ शेर = २ शेर : १ शेर.

घ.—गुणोत्तराच्या अपूर्णांकांना समच्छेदरूपें किंवा समांशरूपें द्यावीं, ह्मणजे ह्या कोणत्याही रूपावरून दोन गुणोत्तरांची तुलना करून, त्यांना लहानमोठीं किंवा बरोबरींचीं म्हणतां येतें. उदाहरणार्थ, ६ : ५ व ४ : ३ हीं गुणोत्तरें घ्या.

ह्यांचे अपूर्णांक अनुक्रमें $\frac{6}{5}$ व $\frac{4}{3}$ हे आहेत.

ह्यांचीं समच्छेदरूपें अनुक्रमें $\frac{18}{15}$ व $\frac{20}{15}$ हीं आहेत.

व ह्यांचीं समांशरूपें अनुक्रमें $\frac{24}{20}$ व $\frac{24}{18}$ हीं आहेत.

ह्या समच्छेदरूपांत पहिल्याच्या अंशापेक्षां दुसऱ्याचा अंश

मोठा आहे, म्हणून ह्या गुणोत्तरांच्या किमती ह्या अंशांच्याप्रमाणें लहानमोठ्या असल्या पाहिजेत. ह्मणजे १८ ना जितके पट मोठे २० आहेत तितकेच पट पहिल्या गुणोत्तरापेक्षां दुसरें गुणोत्तर मोठें असलें पाहिजे. तसेंच वरच्या समांशरूपांत पहिल्याच्या छेदापेक्षां दुसऱ्याचा छेद लहान आहे, ह्मणून ह्या गुणोत्तरांच्या किमती ह्या छेदांच्या व्यस्त रीतीनें लहानमोठ्या असल्या पाहिजेत. ह्मणजे दुसऱ्याचा छेद १८ ह्याला पहिल्याचा छेद २० हा जितके पट मोठा आहे, तितकेच पट पहिल्या गुणोत्तरापेक्षां दुसरें गुणोत्तर मोठें असलें पाहिजे.

१०६ क्रमिक गुणोत्तरें.—राशींच्या रांगेचीं जीं गुणोत्तरें एका शेजेनें दाखविलीं जातात, त्यांना क्रमिक गुणोत्तरें ह्मणतात. उदाहरणार्थ, ३ हात, ६ हात, ९ हात, ३६ हात, ही राशींची रांग घेतली, तर हिंनें

३ हा : ६ हा, ६ हा : ९ हा, ३६ हा.

हीं गुणोत्तरें एका क्रमानें दाखविलीं जातात. हीं क्रमिक गुणोत्तरें होत. हीं क्रमिक गुणोत्तरें अशीं मांडतात कीं,—

३ हा : ६ हा : ९ हा : ३६ हा.

१०७. भूमितिश्रेढी.—ज्या राशींच्या रांगेचें गुणोत्तर एकच असतें, किंवा ज्या रांगेंतील राशि एकाच गुणोत्तराएवढ्या पटीनें वाढत जातात अगर कमी होत जातात, त्या रांगेला भूमितिश्रेढी ह्मणतात. जशी. ३ हा, ६ हा, १२ हा, २४ हा इ०

अशा क्रमिक गुणोत्तरांतल्या किंवा श्रेढींतल्या प्रत्येक राशीला एकाच संख्येनें गुणिलें किंवा भागिलें, तर ह्या गुणोत्तरांत बदल होणार नाहीं हें उघड आहे.

१०८. साधें गुणोत्तर.—एका युग्माचें जें गुणोत्तर त्याला साधें गुणोत्तर ह्मणतात. उदाहरणार्थ, पुढचीं साधीं गुणोत्तरें पहा.

३ : ६ , ६ : ९ व ९ : १८.

१०९. संयुक्त गुणोत्तर.—साध्या गुणोत्तरांच्या गुणाकाराला त्यांचें **संयुक्त गुणोत्तर** किंवा **गुणितगुणोत्तर** ह्मणतात. ह्मणजे

साध्या गुणोत्तरांतील अग्रसरांच्या गुणाकारानें नवा अग्रसर केला आणि उपाग्रसरांच्या गुणाकारानें नवा उपाग्रसर केला, तर त्या नव्या युग्माच्या गुणोत्तराला मूळयुग्मांचें संयुक्त गुणोत्तर ह्मणतात. उदाहरणार्थ, वरच्या साध्या गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर,

३ × ६ × ९ : ६ × ९ × १८ हें आहे,

किंवा संक्षेप देतां ३ : १८ हें आहे.

क्रमिक राशींतील क्रमिक गुणोत्तरांच्या गुणाकारांत मधल्या राशींचा संक्षेप जावयाचा ह्मणून,

११०. फल.—क्रमिक गुणोत्तरांचें संयुक्त गुणोत्तर हें त्या क्रमांतील आद्यंतराशींचें गुणोत्तर दाखवील.

प्रमाण.

१११. दोन गुणोत्तरांच्या समानतेला (बरोबरीला) प्रमाण ह्मणतात व ती समानता = ह्या चिन्हानें किंवा ह्याच्या आद्यंत ४ बिंदूंनीं दाखवितात. जशी.—

३ : २ = १५ : १०

किंवा ३ : २ : : १५ : १०

अथवा ३ रु. : २ रु. : : १५ पेरू : १० पेरू.

हें प्रमाण, जसे ३ स २, तसे (तितकेच पट) १५ स १० असें वाचावें, आणि तें $\frac{३}{२} = \frac{१५}{१०}$ ह्या अपूर्णांकांचे बरोबरीनें दाखवून विचारांत घ्यावें.

प्रमाणांत ४ राशी अगर पदें असतात. १ लें पद व २ रें पद हीं एक गुणोत्तर दाखवितात. ३ रें व ४ थें त्याच्या बरोबरीचें दुसरें गुणोत्तर दाखवितात. गुणोत्तरें समान असलीं ह्मणजे **प्रमाण** होतें. तेव्हां प्रमाणांतील १ लें, २ रें हीं पदें एका जातीचीं व ३ रें व ४ थें हीं दोन एकाच जातीचीं व एकाच मानाचीं असलीं ह्मणजे पुरें आहे. चारी पदें एकाच जातीचीं व एकाच मानाचीं असलीं पाहिजेत असें नाहीं.

$$\frac{३}{२}\frac{\text{रु.}}{\text{रु.}} = \frac{३}{२} \text{ आणि } \frac{१५}{१०}\frac{\text{पेरू}}{\text{पेरू}} = \frac{१५}{१०} = \frac{३}{२}.$$

ह्मणजे गुणोत्तराचे अग्रसर व उपाग्रसर परिमाणवाचक अथवा भाववाचक असले तरी गुणोत्तर भावसंख्याच येणार. तेव्हां प्रमाण मांडण्याकरितां त्यांतील ४ पदें भावसंख्या असोत किंवा परिमाणसंख्या असोत, तीं भावसंख्या आहेत असेंच धरून चाललें तरी अडचण पडणार नाहीं.

३ रु. : २ रु. :: १५ पेरू : १० पेरू.

हें प्रमाण $\frac{३}{२} = \frac{१५}{१०}$ असें वाम गुणोत्तरें घेऊन (इंग्रजी तऱ्हेनें) बरोबरी मांडल्यानें होतें. व $\frac{२}{३} = \frac{१०}{१५}$ असें दक्षिण गुणोत्तरांची (मराठी तऱ्हेची) बरोबरी मांडल्यानें होतें, ह्मणून प्रमाणांतील दोन युग्मांची बरोबरी मांडतांना गुणोत्तरांस अपूर्णांकाचें रूप दिलें तर दोन्ही युग्मांचे अपूर्णांक एकाच (दक्षिण किंवा वाम) गुणोत्तरानें मांडावे. हें लक्षांत ठेवावें. कारण हे दोन प्रकारचे अपूर्णांक एकमेकांचे उलट अथवा व्युत्क्रम होतात, म्हणून एक एका प्रकारानें व दुसरा दुसऱ्या प्रकारानें मांडू नये.

११२. प्रमाणांतील शेवटचीं व मधलीं पदें.— प्रमाणांतल्या पहिल्या व चवथ्या राशींना शेवटील पदें ह्मणतात आणि दुसऱ्या व तिसऱ्या राशींना मधलीं पदें म्हणतात.

११३. प्रमाणासंबंधीं कांहीं उपयुक्त नियम पुढें दिले आहेत. हे नियम विशेष अंकांच्या प्रमाणाशीं पडताळून पाहिले असतां त्यांचा खरेपणा प्रत्ययास येतो. तरी त्यावरून हे नियय कोणत्याही प्रमाणाशीं खरे राहतील, असें सामान्येंकरून ह्मणवत नाहीं, ह्याकरितां पहिला, दुसरा, तिसरा, चवथा, हे क्रमिक राशि किंवा त्यांच्या संख्या दाखविण्याला प, दु, ति, च, हे सूचक वर्ण किंवा क, ख, ग, घ, असले क्रमिक वर्ण घेऊं, आणि समानतेच्या प्रत्यक्ष प्रमाणाच्या आधारानें हे नियम सामान्यरूपानें सिद्ध करूं.

समानतेचीं प्रत्यक्ष प्रमाणें.

स. प्र. १ लें.— जे राशि एका (किंवा समान) राशीशीं समान असतात, ते परस्पर समान असतात.

उ० क बरोबर प व क बरोबर ब असेल तर

प = ब असें होतें.

स. प्र. २ रें.—समानांत समान (किंवा एकच) मिळविले, तर बेरजा समान येतात.

उ० क + प = क + ब अथवा क + १ = ब + १.

स. प्र ३ रें.—समानांत समान (किंवा एकच) वजा केले, तर बाक्या समान येतात.

उ० क - प = क - ब अथवा क - ४ = ब - ४

अथवा क - १ = प - १.

स. प्र. ४ थें.— समानांस समानांनीं (किंवा एकानेंच) गुणिलें, तर गुणाकार समान येतात.

उ० क × प = ब × प = क × ब

क × १ = प × १ = ब × १

अथवा क × ४ = ब × ४ = प × ४.

स. प्र ५ वें.— समानांस समानांनीं (किंवा एकानेंच) भागिलें, तर भागाकार समान येतात.

उ०—$\frac{क}{प} = \frac{ब}{प}$ अथवा $\frac{क}{३} = \frac{ब}{३} = \frac{प}{३}$

अथवा $\frac{क}{१} = \frac{ब}{१} = \frac{प}{१}$

११४. नियम १ ला.— चार राशि प्रमाणांत असले तर १ ला व ४ था यांचा गुणाकार, २ रा व ३ रा यांच्या गुणाकाराबरोबर होतो.

उ० जर ४ : १२ :: ६ : १८

तर ४ × १८ = १२ × ६

कारण इंग्रजी गुणोत्तरें अपूर्णांकांत लिहिल्यानें

$$\frac{४}{१२} = \frac{६}{१८}$$

$$\frac{४ \times १८}{१२ \times १८} = \frac{४}{१२}$$

आणि $$\frac{६ \times १२}{१८ \times १२} = \frac{६}{१८}$$

∴ स. प्र. १ प्रमाणें

$$\frac{४ \times १८}{१२ \times १८} = \frac{६ \times १२}{१८ \times १२}$$

ह्या दोन्ही अपूर्णांकांचे छेद सारखे आहेत.

∴ स. प्र. ५ प्रमाणें

$$४ \times १८ = ६ \times १२$$

अथवा सूचक वर्ण घेऊन

जर प : दु :: ति : च

तर प $\times$ च = दु $\times$ ति

कारण $$\frac{प}{दु} = \frac{ति}{च}, \therefore \frac{प \times च}{दु \times च} = \frac{प}{दु}$$

आणि $$\frac{दु \times ति}{दु \times च} = \frac{ति}{च} \therefore प \times च = दु \times ति.$$

हा नियम फार महत्वाचा आहे. ह्यावरून कोणत्याही प्रमाणांतील कोणतेही ३ राशि ठाऊक असतील, तर ४ था राशि काढतां येतो. ह्यामुळें हा नियम त्रैराशिकाचा पाया आहे असें होतें.

११५. प्रमाणांत मधलीं पदें एकच असलीं तर त्या प्रत्येकाला शेवटील पदांचें भूमितिमध्यप्रमाण ह्मणतात. उ. २ : ४ = ४ : ८ येथें २ व ८ ह्यांचें भूमितिमध्यप्रमाण ४ आहे. कारण नियम १ प्रमाणें $२ \times ८ = ४ \times ४ = ४^२$

$$\sqrt{२ \times ८} = ४ \text{ ह्मणून,}$$

दोन संख्यांचें भूमितिमध्यप्रमाण हें त्यांच्या गुणाकाराच्या वर्गमूळानें दाखविलें जातें.

११६. सूचना १ ली.— प · च = दु · ति ह्या समानतेला स. प्र. ५ प्रमाणें चनें दोन्हीकडे भागिलें, तर,

$$प = \frac{दु \cdot ति}{च} \text{ येतो.}$$

ह्यावरून प्रमाणामध्यें जे दोन गुणाकार बरोबर असतात त्या-

तील एकाच्या अवयवानें दुसऱ्याला भागावें ह्मणजे राहिलेला अवयव येईल. जसा. —

$$प = \frac{दु \cdot ति}{च} \qquad ति = \frac{प \cdot च}{दु}$$

$$दु = \frac{प \cdot च}{ति} \qquad च = \frac{दु \cdot ति}{प}$$

ह्यावरून ४ थें पद काढणें झाल्यास ३ ऱ्या पदास मराठी गुणोत्तरानें गुणावें असें होतें.

उदाहरण. ६, ७, ८, ह्या तीन संख्या प्रमाणांत येण्यास पहिलें किंवा दुसरें पद कोणतें असावें ?

पहिलें पद काढणें तर, $प = \frac{दु \cdot ति}{च} = \frac{६ \times ७}{८} = ५\frac{१}{४}$.

ह्यानें वरील प्रमाण असें होतें कीं, $५\frac{१}{४} : ६ = ७ : ८$.

दुसरें पद काढणें तर, $दु = \frac{प \cdot च}{ति} = \frac{६ \times ८}{७} = ६\frac{६}{७}$.

ह्यानें वरील प्रमाण असें होतें कीं, $६ : ६\frac{६}{७} = ७ : ८$.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ४१.

खालीं संख्या दिल्या आहेत त्यांच्याशीं प्रमाणांत येत अशा आदि पदीं, २ रे पदीं, ३ रे पदीं, आणि ४ थे पदीं, कोणत्या संख्या येतील तें सांगा.

१. २, ३, ४.	२. ३, ४, ५.
३. ४, ५, ६.	४. ५, ६, ७.
५. २, ५, ७.	६. ४, ५, ८.
७. २, ७, ९.	८. ५, ७, ७.

११७. सूचना २ री.–दिलेल्या बरोबरीवरून प्रमाणांतील पदें मांडण झाल्यास दोन गोष्टी लक्षांत ठेवाव्या.

(१) पदें प्रमाणांत आहेत म्हणून शेवटच्या दोन पदांचा गुणाकार मधल्या दोन पदांच्या गुणाकाराबरोबर पाहिजे.

(२) दोन गुणोत्तरांच्या बरोबरीपासून प्रमाण होतें आणि गुणोत्तर निघण्यास दोन राशि एका जातीचे व एका मानाचे लागतात म्हणून पहिलें व दुसरें पद ही जोडी, तसेंच तिसरें व चवथें पद ही जोडी एकाच जातीची व एका मानाची असली पाहिजे.

उ० ४ × ५ खंडी = १० × २ खंडी ह्याबरोबरीचीं पदें प्रमाणांत मांडा.

(१) ४ : १० = २ खंडी : ५ खंडी, किंवा*
(२) ५ : १० = २ खंडी : ४ खंडी, किंवा
(३) १० : ४ = ५ खंडी : २ खंडी, किंवा*
(४) १० : ५ = ४ खंडी : २ खंडी, किंवा
(५) २ खंडी : ४ खंडी = ५ : १०, किंवा
(६) २ खंडी : ५ खंडी = ४ : १०, किंवा*
(७) ४ खंडी : २ खंडी = १० : ५, किंवा
(८) ५ खंडी : २ खंडी = १० : ४ *

ह्या ८ प्रकारांनीं प्रमाणांत लिहितां येतील. ह्यांत ५ खंडी व २ खंडी हेच राशि कायम ठेवणें झाल्यास * नें दाखविलेल्या ४ तऱ्हेनीं मात्र लिहितां येतील.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. घ.

खालीं दिलेल्या समान गुणाकारांच अवयव प्रमाणांत मांडा.

१. १५ × ८ आंबे = १२ × १० आंबे ;

२. १२ × १७ तोळे = ३४ × ६ तोळे ;

३. अठरा पंचे = नऊ दाहीं; ४. ४८ पायली = ४ मण ;

५. २० पावणें = ३० निमे ; ६. $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$;

७. क्ष · ज्ञ = य^2; ८. क. ख = ख. ग ;

११८. नियम २ रा. — चार राशि प्रमाणांत असले तर ते व्यस्त रीतीनेंही प्रमाणांत असतात.

उ० जर ४ : ८ : : १६ : ३२

तर ८ : ४ : : ३२ : १६

कारण, $\frac{४}{८}=\frac{१६}{३२}$ गुणोत्तरांचे इंग्रजी पद्धतिप्र०

∴ $१\div\frac{४}{८}=१\div\frac{१६}{३२}$ स. प्र. ५ प्रमाणें

∴ $\frac{८}{४}=\frac{३२}{१६}$ अथवा

८ : ४ = ३२ : १६

अथवा सूचक वर्ण घेऊन

प : दु = ति : च असला,

तर दु : प = च : ति होईल.

कारण $\frac{१}{१}=\frac{१}{१}$

आणि $\frac{प}{दु}=\frac{ति}{च}$.

येथें स. प्र. ५ प्रमाणें पहिल्या बरोबरीला दुसऱ्या बरोबरीनें भागिलें ह्मणजे असें येतें कीं,—

$$\frac{दु}{प}=\frac{च}{ति}$$

ह्मणजे दु : प = च : ति हेंच सिद्ध करणें होतें.

दोन्ही गुणोत्तरांचीं पदें एका जातीचीं अगर वेगळाल्या जातींचीं असलीं तरी त्यांना हा नियम लागू होतो, असा हा सामान्य नियम आहे. उदाहरण,

३ रुपये : १२ रुपये = ८ महिने : ३२ महिने असले,

तर १२ रु. : ३ रु. = ३२ म. : ८ म. असतात.

११९. सूचना—प : दु : : ति : च असें असल्यास

$\frac{प}{दु}=\frac{ति}{च}$ हें वाम गुणोत्तर (अथवा इंग्रजी गुणोत्तर) होतें आणि

$\frac{दु}{प}=\frac{च}{ति}$ हें दाक्षिण गुणोत्तर (अथवा मराठी गुणोत्तर) होतें.

१२०. नियम ३ रा.—एकाच जातीचे चार राशि प्रमाणांत असले, तर त्यांतील अग्रसर व उपाग्रसर हे एका आड एक राशिप्रमाणांत असतात.

ह्मणजे प : दु = ति : च असला,

तर प : ति = दु : च असतो.

कारण, $\frac{प}{दु} = \frac{ति}{च}$ दिला आहे. ह्या बरोबरीला $\frac{दु}{ति}$ ह्या गुणोत्तरानें स. प्र. ४ प्र. दोहींकडे गुणिलें, तर असें येतें कीं—

$$\frac{प}{दु} \times \frac{दु}{ति} = \frac{ति}{च} \times \frac{दु}{ति}$$

$$\therefore \quad \frac{प}{ति} = \frac{दु}{च}$$

ह्मणजे प : ति = दु : च.

सूचना.--दोन्ही गुणोत्तरांचे राशि एकाच नांवाचे असले (अगर भावसंख्या असले), तरच प : ति व दु : च ह्यांमध्यें गुणोत्तर संभवतें. उदाहरणार्थ.—

२ पै : ४ पै = ६ पै : १२ पै हें प्रमाण पहा. परंतु दोन गुणोत्तरांचे राशि वेगळाल्या नांवाचे असले, तर त्यांत हीं गुणोत्तरें संभवत नाहींत. उदाहरणार्थ.—

२ पैसे : ४ पैसे = ६ आंबे : १२ आंबे, ह्या प्रमाणांत २ पैसे ह्यांचे अमुक पट ६ आंबे आहेत असें ह्मणतां येत नाहीं; ह्मणून ह्यांना ' एकाच जातीचें ' ही अट असावी लागते.

१२१. नियम ४ था.--चारी राशि भावसंख्या असले तर

४ : १२ = ६ : १८

हें प्रमाण खालीं दाखविलेल्या ८ प्रकारांनीं लिहितां येतें.

(१) ४ : १२ = ६ : १८ (२) १२ : ४ = १८ : ६
(३) ४ : ६ = १२ : १८ (४) ६ : ४ = १८ : १२
(५) ६ : १८ = ४ : १२ (६) १८ : ६ = १२ : ४
(७) १२ : १८ = ४ : ६ (८) १८ : १२ = ६ : ४

ह्या सर्व प्रमाणांत मधल्या दोन पदांचा गुणाकार शेवटल्या दोन पदांच्या गुणाकाराबरोबर आहे.

१२२. संयुक्त प्रमाण—ज्या प्रमाणांत अनेक युग्मांचा संबंध येतो, त्यास संयुक्त प्रमाण ह्मणतात. जसें,

$$\text{२ : ३ = ६ : ९}$$
$$\text{५ : १० = ९ : १८}$$
$$\text{४ : १२ = १८ : ५४}$$

असें आहे तर,

$$\text{२} \times \text{५} \times \text{४} : \text{३} \times \text{१०} \times \text{१२} :: \text{६} \times \text{९} \times \text{१८} : \text{९} \times \text{१८} \times \text{५४}.$$

१२३. नियम ५ वा.—अनेक युग्मांच्या गुणोत्तरांबरोबर क्रमिक राशींचीं गुणोत्तरें असलीं, तर त्या युग्मांच्या संयुक्त (गुणित) गुणोत्तरांबरोबर क्रमिक राशींतील आद्यंतींच्या राशींचें गुणोत्तर असतें.

वरील उदाहरणांत

$$\frac{\text{२} \times \text{५} \times \text{४}}{\text{३} \times \text{१०} \times \text{१२}} = \frac{\text{६} \times \text{९} \times \text{१८}}{\text{९} \times \text{१८} \times \text{५४}} = \frac{\text{६}}{\text{५४}}.$$

युग्मांतील भावसंख्या दाखविण्याला **क, ख, ग, घ,** इत्यादि जोड घेतले आणि क्रमिक राशि दाखविण्याला **य, र, ल,** इत्यादि क्रमिक वर्ण घेतले, तर असें होतें कीं—

$$\text{क : ख = य : र}$$
$$\text{ग : घ = र : ल}$$

आणि च : छ = ल : व असला

तर $\text{क} \cdot \text{ग} \cdot \text{च : ख} \cdot \text{घ} \cdot \text{छ = य : व}$ असतो.

येथें य, र, ल, इत्यादि राशि भावसंख्यांचे असले, तर **स. प्र. ४ प्र.** वरील बरोबरींचा गुणाकार करून उजवीकडच्या गुणोत्तराला साधारण अवयवांचा संक्षेप दिला, ह्मणजे इष्टसिद्धि होते. परंतु हे राशि परिमाणांचे असले, ह्मणजे त्यांचा गुणाकार संभवत नाहीं. ह्मणून र आणि ल ह्यांच्या किमती फल १ प्रमाणें दक्षिणगुणोत्तरांचे आधारें काढून त्यांच्या जागीं ठेवाव्या, ह्मणजे असें येतें कीं —

$$\text{क : ख = य : } \frac{\text{ख}}{\text{क}} \times \text{य}$$

$$\text{ग : घ = } \frac{\text{ख}}{\text{क}} \times \text{य} : \frac{\text{ख}}{\text{क}} \times \frac{\text{घ}}{\text{ग}} \times \text{य}$$

आणि $\quad च : छ = \frac{ख}{क} \times \frac{घ}{ग} \times य : व$

प्र. नि. १ प्र. $\quad च \times व = \frac{ख \cdot घ \cdot छ \times य}{क \cdot ग}$

स. प्र ४ प्र. $\quad क \cdot ग \cdot च \times व = ख \cdot घ \cdot छ \times य$

प्र. नि. २ प्र. $\quad क \cdot ग \cdot च : ख \cdot घ \cdot छ = य : व$

असें येतें. हेंच सिद्ध करणें होतें. ह्याच नियमाचे आधारें संयुक्त प्रश्न अगर बहुराशिकें सोडवितां येतात.

उदाहरण १ लें.-कला ख हें गुणोत्तर २ : ३ असें आहे, आणि खला ग हें गुणोत्तर ५ : ६ असें आहे, तर कला ग हें गुणोत्तर कसें होईल ?

आतां $\quad \frac{क}{ख} = \frac{२}{३}$

आणि $\quad \frac{ख}{ग} = \frac{५}{६}$

$\therefore \quad \frac{क}{ख} \cdot \frac{ख}{ग} = \frac{\cancel{२}^{१}}{३} \cdot \frac{५}{\cancel{६}_{३}}$

संक्षेपानें $\quad \frac{क}{ग} = \frac{५}{९}$

क : ग = ५ : ९ हें उत्तर.

उदाहरण २ रें.—कला ख हें गुणोत्तर २ : ३ असें आहे, खला ग हें ५ : ६ असें आहे, आणि गला घ हें ७ : ८ असें आहे. ह्यावरून क, ख, ग, घ, ह्यांचीं क्रमिक गुणोत्तरें सांगा.

सूचना.—ह्या प्रत्येक जोडीला डावीकडचे तिच्या खालचे अंक (अग्रसर) व उजवीकडचे तिच्या वरचे अंक (उपाग्रसर) असे गुणक द्यावे, ह्मणजे त्यांचे जागीं क्रमिक व पूर्णसंख्या येतात. हा नियम*

* येथें दुसरीं इत्यादि जोडच्यांपासून प्रमाणाचे आधारें क्रमिक राशि आणावे ते २ · ३, $\frac{३ \times ६}{५}$, $\frac{३ \times ६ \times ८}{५ \times ७}$, असे नियमानें येतात. ह्यांना शेवटच्याचा छेद हा साधारण गुणक देऊन सर्वांचे छेद उडवावे, ह्मणजे वरील नियम दिसून येतो.

लक्षांत ठेवा. ह्या नियमाप्रमाणें ह्या जोड्यांना अनुक्रमें ५×७, ७×३, व ३×६, हे गुणक द्यावे, ह्मणजे असें येतें कीं–

क : ख = २ : ३ = ७० : १०५
ख : ग = ५ : ६ = १०५ : १२६
ग : घ = ७ : ८ = १२६ : १४४

∴ क : ख : ग : घ = ७० : १०५ : १२६ : १४४ हें उत्तर.

उदाहरण ३ रें.–एका ७२ शेरांच्या भांड्यांत ११ भाग दूध व १ भाग पाणी आहे. त्यांत किती पाणी घालावें ह्मणजे त्यांत पाण्याचे ९ पट दूध होईल ?

खुलासा. ७२ शेरांचे १२ भाग केले तर प्रत्येक भाग ६ शेरांचा होतो, अर्थात् ह्या भांड्यांत ६ शेर पाणी व ६६ शेर दूध आहे. हें दूध कायम ठेवणें आहे. ह्मणून

$९ : १ = ६६ \text{ शेर} : ७\frac{१}{३} \text{ शेर}$

ह्यावरून $१\frac{१}{३}$ शेर पाणी घालावें हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. स.

१. पुढील गुणोत्तरांना सरळरूपें द्या.

२१ : ३५ ; ४४१ : २४०१ ; $\frac{३}{४} : \frac{६}{७}$; $३\frac{३}{४} : ५\frac{५}{८}$;
३·१६ : ७·७५७ ; $१ : \frac{१}{२}$; $\frac{१}{३} : \frac{१}{४}$; $\frac{२}{३} : \frac{३}{४}$; $\frac{५}{६} : \frac{७}{८}$.

२. पुढच्या गुणोत्तरांचीं संयुक्त गुणोत्तरें सरळरूपांनीं सांगा.

२ : ३ ; ३ : ४ ; ४ : ५ ; ७ : १५ ; ९ : १६ ;
२४ : ३५ ; $१\frac{३}{४} : २\frac{५}{७}$; $२\frac{८}{२१} : ७\frac{३}{८}$.

३. पुढच्या प्रत्येक जोडींतलें मोठें गुणोत्तर सांगा.

५ : ७ का ७ : ९ ; ८ : १५ का १५ : २९ ;
$२\frac{३}{८} : ६\frac{४}{७}$ का $४\frac{५}{९} : ११\frac{३}{४}$.

४. $४\frac{७}{९} : \frac{१३५}{१८१}$ आणि $६\frac{१}{२} : १\frac{२}{१२}$ ह्या गुणोत्तरांचें प्रमाण बनतें का नाहीं ?

५ $४\frac{४}{७}$, $९\frac{५}{९}$, १३ आणि $\frac{४५५}{६९८}$ ह्या चार संख्या प्रमाणांत आहेत काय ? नसल्यास पहिल्या तीन संख्या प्रमाणांत येण्याला ४ थें पद काय द्यावें ?

६. पुढच्या संख्यांचीं भूमितिमध्यप्रमाणें सांगा.
$२\frac{३}{८}$ व $१०\frac{२}{३}$;   ·१ व ·००१;   ३८७·९०८ व ·०१९८७.
उत्तरांत द. स्थ. ४ आणा.

७. एक आगगाडी $११\frac{२}{५}$ तासांत $३९७\frac{५}{६}$ मैल चालते, आणि दुसरी $८\frac{४}{९}$ तासांत $२६२\frac{४}{३३}$ मैल चालते. ह्यांच्या वेगांची तुलना करून दाखवा. (ह्मणजे ह्या वेगांचें प्रमाण सांगा)

८. कला २ रु. मिळाले तर खला ३ रु. मिळतात, खला ४ रु मिळाले तर गला ५ रु. मिळतात आणि गला ६ रु. मिळाले तर घला ७ रु. मिळतात. तर क, ख, ग, घ ह्यांच्या ह्या मिळकती परस्परांशीं ताडून दाखवा. (ह्मणजे ह्या मिळकती क्रमिक प्रमाणाच्या रूपानें मांडून दाखवा)

९. एक वाणी १९ शेर मोहरींत ५ शेर शिरीस मिळवितो आणि दुसरा वाणी २७ शेर मोहरींत ७ शेर शिरीस मिळवितो. ह्या दोन मिश्रणांतील मोहऱ्यांचें प्रमाण सांगा.

१०. एका चरवींत ९ भाग दूध व १ भाग पाणी आहे. त्या चरवींत आणखी ४ शेर पाणी घातलें, तर त्या मिश्रदुधांत शुद्ध दुधाच्या षष्ठांश पाणी होतें. तर ह्या चरवींत शुद्ध दूध किती शेर आहे ?

११ एक पिंप ३ भाग निंची दारू आणि २ भाग उंची दारू ह्यांनीं भरलेलें आहे ह्यांतून किती मिश्र काढून त्याबद्दल उंची दारू घालावी, ह्मणजे त्या नव्या मिश्रणांत दोन्ही दारू समान होतील ?

१२. एक शिकारी कुत्रा सशाच्या मागें लागला आहे. हा सशाच्या ४ उड्यांच्या वेळांत ३ उड्या टाकितो, पण सशाच्या ३ उड्यांच्या लांबीबरोबर ह्याच्या २ उड्यांची लांबी असते. ह्यावरून हा कुत्रा व ससा ह्यांच्या वेगांचें प्रमाण सांगा.

१३. ७५०४ रुपये अ, ब व क ह्यांत अशा रीतीनें वांटा कीं अला बचे दुप्पट वांटा मिळेल व बला कचे ३ पट मिळेल.

१४. २८६ पौंड ह्या रकमेचे असे भाग करा कीं ते २, ५, ४ ह्या प्रमाणांत असतील.

१५. ५ पुरुष व ८ मुलें ह्यांनीं कांहीं एक काम शेवटास नेलें. जर प्रत्येक मुलाचे २ पट काम प्रत्येक पुरुष करीत आहे. तर त्या कामाचा कितवा भाग ५ पुरुषांनीं तडीस नेला ?

१६. बाराची दारू सोरा, कोळसा व गंधक हीं मिळवून करितात. त्यांचें प्रमाण क्रमवार ३३, ७ व ५ हें आहे. तर ९० शेर दारूंत किती शेर गंधक आहे ?

१७. गाडी, घोडा व सामान मिळून १०४० रुपये किंमत होते. घोड्याची किंमत गाडीचे ५ पट आहे व गाडीची सामानाचे दुप्पट आहे. तर सामानाची किंमत काढ.

१८. एका त्रिकोणाच्या बाजू १, $\frac{३}{३}$ व $\frac{३}{४}$ ह्या प्रमाणांत आहेत. तर सर्वांत मोठी बाजू १ यार्ड धरली तर त्या त्रिकोणाच्या बाजू किती मोठ्या असल्या पाहिजेत.

१९. दोन गृहस्थांनीं भागीनें एक कुरण ३०० रुपयांस खंडून घेतलें आहे. तेथें एकजण आपल्या ३० गाई १२ दिवस चारतो व दुसरा आपल्या २० गाई ७ दिवस चारतो. तर प्रत्येकाचे हिश्शास किती रक्कम देणें येते ?

२०. १०६५ रुपये तिघेजणांत असे वांटून द्या कीं ते वांटे $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{५}$ व $\frac{१}{७}$ ह्या प्रमाणांत होतील.

२१. कांहीं व्यापारांत अ, ब आणि क ह्या तिघांनीं भांडवल ४६०० रु. घातलें. अनें बपेक्षां ४०० रुपये जास्त दिले. बनें कपेक्षां ३०० जास्त दिले. व्यापारांत २४५ रु नफा झाला, तर तो तिघांनीं कसा वांटून घ्यावा ?

२२. १०० भाग तांबें आणि ११ भाग जस्त असें मिश्र करून तोफ ओततात. तर १६ ह. बे. ३ का. ११ पौं. वजनाची तोफ ओतण्यास तांबें व जस्त किती किती वजन लागतील ?

२३. आक्सिजन व हैड्रोजन ह्या दोन वायूंपासून पाणी होतें व त्यांत ह्या दोन वायूंचें ८८.८ : ११.१ हें प्रमाण असतें, तर १ घनफूट (१००० औंस) पाण्यांत प्रत्येक वायूचें वजन किती असेल ?

२४. अ आणि ब ह्यांनीं एका व्यापारांत ४ : ५ ह्या प्रमाणानें भांडवल घातलें. तीन महिन्यांनीं त्यांनीं आपापल्या भागांपैकीं अनुक्रमें $\frac{२}{३}$ व $\frac{३}{४}$ काढून घेतले. वर्षाचे शेवटीं त्यांस ३३५ रुपये नफा झाला, तर तो त्यांनीं कसा वांटून घ्यावा ?

२५ अच्या मालकीची एक खाण आहे, तिचेपैकीं $\frac{२}{३}$ त्यानें बला विकलें. बनें विकत घेतलेल्या भागापैकीं $\frac{१}{५}$ कला विकत दिला व शिल्लक राहिलेल्या भागापैकीं $\frac{१}{४}$ अला परत विकला. एकंदर नफा १५०० रुपये झाला. तर प्रत्येकाचे वांटणीस काय येईल ?

साधें प्रमाण अथवा त्रैराशिक.

१२४. जें प्रमाण दोन गुणोत्तरांचें साम्य दाखवितें, किंवा ज्यांत उत्तर शोधण्याला तीनच राशि (साधे किंवा संयुक्त) पूर्णपणें दिलेले असतात, त्याला साधें प्रमाण अगर **त्रैराशिक** ह्मणतात.

उदाहरण.—२ पैशांस ५ आंबे मिळतात, तर ६ पैशांस किती आंबे मिळतील ? ह्याचें प्रमाण असें मांडतात कीं,—

२ पैसे : ६ पैसे = ५ आंबे : उत्तर आंबे.

ह्या प्रमाणांत दोन्ही गुणोत्तरें साधीं आहेत व त्यांची बरोबरी दिली आहे ह्मणून ह्याला साधें प्रमाण ह्मणतात. तसेंच ह्यांत उत्तर शोधण्यासाठीं तीनच राशि पूर्णपणें दिले आहेत. ह्मणून ह्याला त्रैराशिकही ह्मणतात.

१२५. राशींचीं नांवें.—प्रमाणांतल्या राशींना ह्मणजे पदांना अनुक्रमें **मानराशि** (ह्म० माप), **इच्छाराशि**, **फलराशि** आणि **इच्छाफल** अशीं नांवें देतात.

वरील उदाहरणांत '२ पैसे' हा मानराशि व '६ पैसे' हा इच्छाराशि आहे; तसेंच '५ आंबे' हा फलराशि व 'उत्तर येणारे आंबे' हा इच्छाफल आहे. कलम १६ पहा.

१२६. संबंधी राशि—प्रमाणांत दोन युग्में असतात, आणि प्रत्येकाचा एक अग्रसर व एक अनुगामी असतो. पहिल्या अग्रस-

राचा संबंध दुसऱ्या अग्रसराशीं असतो, तसाच पहिल्या उपाग्रस-राचा संबंध दुसऱ्या उपाग्रसराशीं असतो. हेच दोन संबंध मान व त्याचें फल, आणि इच्छा व इच्छाफल, ह्या अन्वर्थक जोड्यां-नीं दर्शित होतात.

१२७. सजातीय राशि.—प्रमाणांत पहिल्या अग्रसराची पट त्याचा उपाग्रसर असून दुसऱ्या अग्रसराची तीच पट त्याचा उपा-ग्रसर असतो. त्याचप्रमाणें मानराशि व इच्छाराशि हे सजातीय अ सून फलराशि व इच्छाफल हेही राशि सजातीय असतात.

उदाहरणांत संबंधी राशींचे दोन जोड दिलेले असून त्यांच्या प्रमाणांत सजातीय राशींचे दोन जोड वेगळाले मांडावे लागतात. हा भेद वरचें उदाहरण व प्रमाण ह्यांवरून लक्षांत आणा.

१२८. महत्वें व त्यांचे बदल.—प्रमाणांत दोन गुणोत्तरांचें साम्य दिलें असतें.

प्रत्येक गुणोत्तरांत एक अग्रसर व एक उपाग्रसर असतो.

२ पैसे : ६ पैसे = ५ आंबे : १५ आंबे.

ह्या प्रमाणांत '२ पैसे : ६ पैसे' ह्या गुणोत्तरांत २ पैसे व ६ पैसे ह्यांस मानराशींचे अग्रसर व उपाग्रसर ह्मणतात. तसेंच '५ आंबे : १५ आंबे' ह्या गुणोत्तरांत '५ आंबे व १५ आंबे' ह्यांस फलराशींचे अग्रसर व उपाग्रसर ह्मणतात.

मानराशींतील अग्रसराची कांहीं पट त्याचा उपाग्रसर घेत-ला, ह्मणजे फलराशींतील अग्रसराची तितकीच पट, अगर तितक्यावाच हिस्सा, त्याचा उपाग्रसर घ्यावा लागतो. ह्मणून इच्छाराशीला मानराशीचा अगर मानमहत्वाचा बदल आणि इच्छाफलाला फलराशीचा अगर फलमहत्वाचा बदल ह्मणतात. (कलम ९६ पहा.)

उदाहरणार्थ, नेमलेल्या वेळांत १ मनुष्य ६ कागद लिहितो असें घेतलें, ह्मणजे त्या वेळांत दोन मनुष्यें १२ कागद लिहि-तील असें घेतलें जातें. तसेंच नेमलेलें काम १ मनुष्य ६ ता-सांत करितो असें घेतलें, ह्मणजे तें काम २ मनुष्यें ३ तासांत

करितील असें घेतलें जातें. ह्यांचीं प्रमाणें उदाहरणांतल्या संबंधी राशींच्या क्रमानें अशीं मांडलीं जातात कीं,--

१ लें. १ मनु. : २ मनु. = ६ कागद : १२ कागद.

२ रें. १ मनु. : २ मनु. तर ६ तास : ३ तास.

१ ल्या प्रमाणांत मनुष्याचा बदल २ पटीचा आहे, तसाच कागदांचाही बदल २ पटीचा आहे. ह्मणजे १ स २ असा सम आहे. २ ऱ्या प्रमाणांत मनुष्याचा बदल २ पटीचा आहे, परंतु तासांचा बदल २ ऱ्या हिश्शाचा आहे, ह्मणून २ रें युग्म उलट (**व्यस्त**) केलें तरच त्याचें गुणोत्तर १ ल्याच्या गुणोत्तराबरोबर मांडतां येईल. व्यवहारांतल्या प्रश्नांवरून अशीं दोन प्रकारचीं प्रमाणें मांडिलीं जातात, ह्मणून प्रमाणाचे प्रकार **सम** आणि **व्यस्त** असे दोन कल्पितात.

समप्रमाण.

१२९. ज्या प्रमाणांत मानराशींतील अग्रसराची कांहीं पट अगर हिस्सा त्याचा उपाग्रसर घेतला तर फलराशींतील अग्रसराची तितकीच पट अगर तितकाच हिस्सा त्याचा उपाग्रसर असतो त्यास **समप्रमाण** ह्मणतात.

उदाहरणार्थ, कोणतेंही काम नेमलेल्या मनुष्यांकडून नेमकें होत आहे (१ ल्या प्रमाणांतील अग्रसर पहा), तर तें काम अधिक मनुष्यांकडून अधिक होईल, व कमी मनुष्यांकडून कमी होईल, ह्मणून कामाचा बदल मनुष्यांच्या समप्रमाणानें होतो असें म्हणतात ह्याचा अर्थ मनुष्यांच्या संख्यांच्या समप्रमाणांत कामाचे राशि असतात असा होतो.

१३०. कितीएक समप्रमाणें व्यवहारावरून कळतात. जशीं.– इतर संबंध कायम (एकसारखेच) असले, तर,

(१) वस्तूंच्या किमतींचा बदल त्या वस्तूंच्या संख्यांच्या समप्रमाणांत होतो.—

उ० २ पैशांना ६ केळीं तर ८ पैशांना २४ केळीं.

(२) वाहतुकीच्या भाड्याचा बदल लांबीच्या समप्रमाणांत होतो. जसा —

उ० ५ कोस जाण्यास १ रुपया तर १५ कोसांस ३ रुपये.

(३) घर वापरण्याच्या भाड्याचा बदल वापरणुकीच्या कालाच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

उ० १ महिन्याचें घरभाडें २ रुपये पडतें तर ८ महिन्यांचें घरभाडें १६ रुपये पडेल.

(४) मुद्दल वापरण्याच्या व्याजाचा बदल त्या मुद्दलाच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

उ० १०० रुपयांचें १ महिन्याचें व्याज ८ आणे पडतें तर १२ महिन्यांचें, १२ × ८ = ९६ आणे अगर ६ रुपये पडतात.

(५) नियमित कालापावेतों वापरणाऱ्या शक्तींच्या कामाचा बदल त्या शक्तींच्या संख्यांच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.—

उ० १ मोटेला ४ बैल लागतात, तर ५ मोटांना २० बैल लागतील.

कितीएक समप्रमाणें शास्त्रीय विचारांपासून कळतात. जशीं.-

(६) अपूर्णांकांचें छेद सारखे असले, तर त्यांच्या किमतींचा बदल अंशांच्या समप्रमाणांत होतो. जसा.--

$$५ \text{ अंश} : ७ \text{ अंश} = \frac{५}{१६} : \frac{७}{१६}.$$

ह्मणजे ५ व ७ अशा दोन भाज्यांना १६ सारख्या एकाच भाजकानें भागलें, तर हे भागाकार त्या भाज्यांच्या समप्रमाणांत येतात.

(७) वर्तुळ परिघांचा बदल व्यासांच्या समप्रमाणांत होतो. जसा:—

१ फूट व्यासावर वर्तुळ काढलें, तर त्याचा परिघ ३·१४१६ फुटी भरतो असें भूमितीच्या विचारानें ठरतें. येथें ३·१४१६ हीं परिघमानें दाखविण्याकरितां π घेतला तर.—

१ यार्ड व्यास : ५ यार्ड व्यास = ३·१४१६ यार्ड (π) : ५ × ३·१४१६ यार्ड (५ π).

(८) वर्तुळक्षेत्रांचा बदल त्यांच्या व्यासांच्या वर्गांच्या (त्या व्यासांवरील चौरसांच्या) समप्रमाणांत होतो. जसा.—

वर्तुळाच्या व्यासावरील चौरस १ चौरसमान ह्मटला, तर त्यावरील वर्तुळाचें क्षेत्र $\frac{\text{पम}}{४}$ चौ. मानें येतें. ह्मणून.—

$१^{२} : ५^{२} =$ १ व्यासाच्या वर्तुळाचें क्षेत्र $\frac{\text{पम}}{४}$ चौ. मानें : ५ व्यासाच्या वर्तुळाचें क्षेत्र उ० चौ. मानें.

(९) गोलाच्या पृष्ठफळांचा बदल त्यांच्या व्यासांच्या वर्गांच्या समप्रमाणांत होतो. ह्मणजे,

गोलाच्या व्यासावरील चौरस १ चौरसमान ह्मटला, तर त्या गोलाचें पृष्ठफळ पम चौरसमान ठरतें. ह्मणून.—

$१ : ५^{२} =$ १ व्यासाच्या गोलाचें पृष्ठफळ पम चौ. मा. : ५ व्यासाच्या गोलाचें पृष्ठफळ उ० चौ. मा.

(१०) गोलांच्या घनफळांचा बदल त्यांच्या व्यास घनांच्या (व्यासावरील घनांच्या) समप्रमाणांत होतो. जसा.

गोलाच्या व्यासावरील घनाला १ घनमान ह्मटलें, तर त्या गोलाचें घनफळ $\frac{\text{पम}}{६}$ घनमानें ठरतें. ह्मणून,

$१ : ५^{3} =$ १ व्यासाच्या गोलाचें घनफळ $\frac{\text{पम}}{६}$ घनमानें : ५ व्यासाच्या गोलाचें घनफळ उ० घनमानें.

१३१. नियमित प्रेरणेच्या अंत्यवेगाचा बदल प्रेरणा कालाच्या समप्रमाणांत होतो. ह्मणजेः—

पदार्थांवर घडणारें भूमीचें आकर्षण, आगगाडीच्या रांगेवर घडणारी वाफेची प्रेरणा, टांग्यावर लागू होणारी घोड्यांची ओढ, इत्यादि प्रेरणा नेमाच्या असतात. ह्मणजे त्यांजकडून दर सेकंदास किंवा क्षणोक्षणीं नेमलेल्या मानाचा वेग त्यांच्या प्रेरित पदार्थांना मिळत असतो. ह्या वेगवृद्धीनें येणाऱ्या चाळीला जर कांहीं प्रतिबंधक असलें, तर त्यावर ह्या प्रेरित पदार्थांचा एकसारखा दाब लागू होतो; अथवा त्यांची स्थिरावस्था सुटली, तर ह्या प्रेरित पदार्थांना वाढणाऱ्या वेगांच्या गति मिळतात. उदाहरणार्थ, भू-

मीचें आकर्षण आंड्यावर सतत असतें ह्याच्या वेगवृद्धीमुळें त्या आंड्याचा भार त्याच्या डेंखावर एकसारखा लागू होतो, आणि तो आंबा डेंखापासून सुटला ह्मणजे त्याला दर सेकंदास ३२ फुटाप्रमाणें वेग मिळत असतो. ह्यामुळें तो आंबा वाढत्या वेगाच्या गतीनें भूमीकडे चालूं लागतो. भूमीच्या आकर्षणाच्या ह्या नेमाच्या वेगवृद्धीमुळें एकंदर पदार्थांमध्यें नियमित किंवा एकसारखें राहणारें गुरुत्व (वजन) येतें ह्मणून ह्या वेगवृद्धीला गुरुत्वाकर्षण हें नांव देऊन ती ग या आदिवर्णानें दाखवितात. इतर प्रेरणांच्या वेगवृद्धी वृ ह्या वर्णानें दाखवितात, आणि कोणाचेही अंत्यवेग वनें दाखवितात. एथें रोजच्या माहितींतलें गुरुत्वाकर्षणच घेतलें, तर वरील नियमानें असें प्रमाण होतें कीं,—

१ सेकंद : ४ सेकंद = १ सेकंदाचा अंत्यवेग सुमारें ३२ फूट किंवा ग : ४ सेकंदाचा अंत्यवेग व.

नियमानें प्रेरित होणाऱ्या पदार्थांचा चालीचा बदल काळाच्या वर्गांच्या समप्रमाणांत होतो, आणि त्याची एका सेकंदांतली चाल अंत्यवेगाच्या निमे होते, ह्मणून

$१^२ : ४^२$ = सेकंदांतली चाल $\frac{ग}{२}$ किंवा १६ फूट : ४ सेकंदांतली चाल च.

व्यस्त प्रमाण.

१३२. ज्या प्रमाणांत (सम प्रमाणाचे उलट ह्मणजे) मानराशींतील अग्रसराची कांहीं पट अगर हिस्सा त्याचा उपाग्रसर घेतला, तर फलराशींतील अग्रसराचा तितका हिस्सा अगर पट अनुक्रमें त्याचा उपाग्रसर असतो त्यास व्यस्त प्रमाण ह्मणतात. अथवा ज्या प्रमाणांत मानराशीचा कांहीं अंश अथवा पट इच्छाराशि असतां इच्छाफल हें फलराशीच्या तितक्या पट अथवा तितक्याचा अंश असतें त्या प्रमाणास व्यस्त म्हणतात.

उदाहरणार्थ. कोणतेंही काम नेमक्या मनुष्यांकडून नेमक्या काळांत होत आहे (२ ऱ्या प्रमाणांतील १ लें व ३ रें पद पहा), तर तें काम अधिक मनुष्यांकडून कमी काळांत होईल,

(२ रें व ४ थें पद पहा), आणि कमी मनुष्यांकडून अधिक काळांत होईल हें उघड आहे. म्हणून कालाचा बदल मनुष्यांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो असें म्हणतात. समप्रमाणांत जें गुणोत्तर येतें त्याच्या उलट गुणोत्तर व्यस्त प्रमाणांत येतें. प्रमाणांत गुणोत्तरांची बरोबरी मांडावी लागते म्हणून व्यस्त प्रमाणांत एक युग्म उलट मांडावें लागतें. ह्यावरून व्यस्त प्रमाणांत पदांचीं स्थलें कां बदलावीं लागतात हें लक्षांत येईल.

१३३. कितीएक व्यस्त प्रमाणें व्यवहारावरून कळतात. जशीं:—

(१) नेमलेल्या छताला मांजरपाट घालणें असला, तर मांजरपाटाच्या लांबीचा बदल रुंदीच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो. जसा—

उ० २ फूट रुंदीचा तागा जर १० फूट लांब लागतो, तर ४ फूट रुंदीचा ५ फूट लांब पुरे आहे.

(२) नेमलेल्या रकमेच्या मोहरा घेणें असल्या, तर त्यांच्या संख्यांचा बदल त्यांच्या दरांच्या व्यस्त प्रमाणांत होईल. जसा.-

उ० १०० रुपयांच्या मोहोरा घेणें आहे तर २० रु. किमतीच्या ५ आल्या, तर २५ रु. किमतीच्या ४ येतील.

(३) दोन घोड्यांनीं एकच अंतर क्रमिलें, तर त्यांच्या वेगांचा बदल तें अंतर क्रमण्यास लागलेल्या काळांच्या व्यस्त प्रमाणांत होईल. जसा—

उ० दोन घोड्यांनीं १२० मैल अंतर अनुक्रमें ३० व २४ तासांत क्रमिलें तर त्यांचे धांवण्याची गति अनुक्रमें २४ व ३० ह्या प्रमाणांत म्ह० ४, ५ ह्या प्रमाणांत असली पाहिजे.

(४) धान्य मोजकें असलें, तर तें पुरण्याच्या दिवसांचा बदल तें खाणाऱ्या मनुष्यांच्या व्यस्त प्रमाणांत होईल.

उ० ६ मण धान्य २ मनुष्यांस ३० दिवस पुरतें तर ४ मनुष्यांस १५ दिवस जाईल.

१३४. कितीएक व्यस्त प्रमाणें शास्त्रीय विचारांपासून कळतात. जशीं:—

(५) अपूर्णांकांचे अंश समान असले, तर त्यांच्या किमतींचा बदल त्यांच्या छेदाच्या व्यस्त* प्रमाणांत होतो.

उ० $\frac{७}{९} : \frac{७}{१२} = १२ : ९ = \frac{१}{९} : \frac{१}{१२}$

ह्मणजे ७ सारख्या एकाच भाज्याला ९ व १२ अशा वेगळाल्या भाजकांनीं भागलें, तर ते भागाकार त्या भाजकांच्या व्यस्त प्रमाणांत येतात.

(६) तराजूच्या तरफांवरील (दांड्यांवरील) वजनांचा बदल त्या तरफांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो.

उ०. १५ इंच तरफ : १६ इंच तरफ = १६ इं. तरफेवरील पदार्थाचें वजन प : १५ इं. तरफेवरील पदार्थाचें वजन व.

(७) प्रकाशाचा बदल अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो. उदाहरण,

$१^२ : ३^२$ = ३ फूट अंतरावरच्या प्रकाशाचें मान : १ फूट अंतरावरच्या प्रकाशाचें मान.

(८) गुरुत्वाकर्षणाचा बदल अंतरांच्या वर्गांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो.† उ०

भूमध्यापासून समुद्रपृष्ठाचें अंतर मैल $४०००^२$:
भूमध्यापासून हिमालयाच्या शिखराचें अंतर मैल $४००५^२$ =
एका पदार्थाचा हिमालयाच्या शिखरावरील भार ४० शेर :
त्याच पदार्थाचा समुद्रतीरावरील भार उ शेर.

अथवा

$\frac{१}{४०००^२} : \frac{१}{४००५^२}$ = पदार्थाचा समुद्रतीरावरील भार भ शेर : त्याचा हिमालयावरील भार उ शेर.

वर सांगितलेलें समप्रमाण व व्यस्तप्रमाण ह्यांच्या विचारावरून त्रैराशिकाची रीति उत्पन्न होते ती अशी.—

१३५. त्रैराशिकाची रीति.—उत्तराच्या जातीचें दिलेलें पद

---

* युग्मांतील पदांचा क्रम बदलल्यानें, किंवा त्या पदांचे जागीं त्यांचे व्युत्क्रम घेतल्यानें, त्या युग्माचें गुणोत्तर व्यस्त होतें.

† भूमि पूर्ण गोल आहे असें धरून हा नियम सांगितला आहे.

ह्म० फलराशि ३ ऱ्या स्थलीं मांडून उत्तराचें दर्शक अक्षर ४ थ्या स्थलीं मांडावें; ३ ऱ्याचें संबंधीं पद (मानराशि) १ ल्या स्थलीं मांडावें, आणि ४ थ्याचें संबंधीं पद (इच्छाराशि) २ ऱ्या स्थलीं मांडावें.

उत्तर ३ ऱ्या पदापेक्षां जास्त येत आहे, असें वाटल्यास १ ल्या व २ ऱ्या पदांपैकीं जें मोठें असेल तें २ ऱ्या स्थलीं मांडावें व उरलेलें पद १ ल्या स्थलीं मांडावें. उत्तर ३ ऱ्या पदापेक्षां कमी येत असेल तर १ ल्या व २ ऱ्या पदांपैकीं जें लहान असेल तें पद २ ऱ्या स्थलीं मांडावें व उरलेलें पद १ ल्या स्थलीं मांडावें.

(१) १ लें व २ रें पद हीं एका नांवाचीं करावीं व

(२) ३ रें पद जसें उत्तर पाहिजे असेल त्या नांवाचें करावें.

(३) नंतर ३ ऱ्या पदाला २ ऱ्या पदानें गुणावें व १ ल्या पदानें भागावें. भागाकार उत्तर दाखवील.

प्रमाण मांडल्यावर सर्व पदें भावसंख्या आहेत असें कल्पून गुणाकार भागाकार करीत जावें.

उपपत्ति —प्रमाणांत १ ल्या व ४ थ्या पदांचा गुणाकार हा २ ऱ्या व ३ ऱ्या पदांच्या गुणाकाराबरोबर असतो (कलम ११४). ह्मणून २ ऱ्या व ३ ऱ्या पदांच्या गुणाकाराला १ ल्या पदानें भागिलें ह्मणजे ४ थें पद ह्मणजे उत्तर येतें. प्रमाण सम असलें ह्मणजे १ ल्यास : २ रें : : ३ ऱ्यास : ४ थें अशीं पदें असतात. पण प्रमाण व्यस्त असलें ह्मणजे ३ ऱ्या पदाच्या जितके पट उत्तर येणार असेल तितकेंच ३ ऱ्या पदाचे पट २ रें पद करण्याकरितां पदांची अदलाबदल केली पाहिजे. त्रैराशिक मांडीपर्यंत प्रत्येक पदाचे नांवाची जरूर असते. एकदां प्रमाण मांडलें ह्मणजे गुणोत्तरांचें साम्य करून उदाहरण सोडविणें असतें. तें गुणोत्तर नेहमीं भावसंख्या असतें, ह्मणून सर्व संख्या भावसंख्या आहेत असें कल्पिलें ह्मणजे चांगलें.

सूचना १ ली.– १ लें पद व २ रें पद हीं एका लघुतम परिमाणाचीं असलीं; तर तिसऱ्या पदाला एका लघुतम परिमा-

णाचें रूप न देतां विविधाचे रीतीनें गुणाकारभागाकार करावा, व हीं पदें एका मोठ्या परिमाणाचीं असलीं तर ३ ऱ्या पदाला एका परिमाणाचें रूप द्यावें.

सूचना २ री.–गुणकभाजक जोडण्यापूर्वीं अगर नंतर १ लें २ रें, व १ लें ३ रें, ह्या पदांना संक्षेप गेल्यास द्यावा.

उ. १ लें. ३८ शेर साखरेस १११ रुपये पडतात, तर १९ शेर साखरेस काय पडेल ?

ह्या उदाहरणांत उत्तर किती रुपये ? हें काढणें आहे. येथें इच्छाफलाच्या जातीचे १११ रुपये आहेत, हे ३ रे स्थलीं मांडून, इच्छाफल ४ थे स्थलीं कल्पिलें. नंतर १११ रुपयांचे संबंधी ३८ शेर हे पहिले स्थलीं मांडून, इच्छाफलाचे संबंधी १९ शेर हे दुसरे स्थलीं मांडिले. जसें.–

३८ शे : १९ शे : : १११ रु. : इ. फ.

मूळ साखरेच्या निमें दुसरी साखर घेतली, तर मूळ रुपयांच्या निमेंच दुसरे रुपये पडतात, ह्मणून हें प्रमाण सम आहे, म्हणून $\frac{१११ \times १९}{३८}$ रुपये हें उत्तर.

संक्षेप देऊन अथवा सूचना २ प्रमाणें

$$\frac{१११ \times \overset{१}{\cancel{१९}}}{\underset{२}{\cancel{३८}}} = \frac{१११}{२} = \text{रुपये } ५५।।.$$

∴ ५५ रु. ८ आ. हें उत्तर.

अथवा

३८ : १९ : : १११ : इ फ.

संक्षेप देऊन २ : १ : : १११ : इ. फ.

ह्मणून $\frac{१}{२}$ ह्या मराठी गुणोत्तरानें तिसरें पद गुणिल्यास इच्छाफल येईल. (क. ११४)

∴ इ. फ. = १११ रु. × $\frac{१}{२}$ = ५५।। रुपये हें उत्तर

उ. २ रें. ८५ मैल जाण्यास १०।।= भाडें पडलें, तर १३० मैल जाण्याला भाडें काय पडेल ?

रीतीप्रमाणें १०।।= भाडें व इच्छाफल हीं ३ रे व ४ थे स्थानीं मांडून, त्यांचे संबंधी पदें १ ले व २ रे स्थलीं मांडिलीं. जसें.–

८५ मै. : १३० मैल = १०॥= रु. : इष्ट रु.

संक्षेपानें १७ मै. : २६ मैल = १०॥= रु. : इष्ट रु.

१७ मैलांपेक्षां अधिक लांबीवर गेलें तर १०॥= रु. पेक्षां अधिक भाडें पडेल, ह्मणजे भाड्याचा बदल लांबीच्या सम प्रमाणांत होतो; म्हणून हें उदाहरण सम आहे. ह्मणून,

$$\text{उ. इष्ट. रु.} = \frac{२६ \times १०॥=}{१७} = १६।\text{. रु.}$$

```
   १०॥=
     २६
  -------
१७|२७६।
  -------
    १६।
```

∴ १६। रु. सुमारें हें उत्तर.

उ. ३ रें. नेमलेलें कुरण ८४ गाईंस १२ दिवस पुरतें, तर तें ११२ गाईंस किती दिवस पुरेल ?

रीतीप्रमाणें ८४ गा. : ११२ गा. : : १२ दि. : इ. दि.

कुरण खाण्याला गाई वाढल्या तर तें कमी दिवस पुरतें म्हणजे दिवसांचा बदल गाईंच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो, यास्तव हें उदाहरण व्यस्त आहे. म्हणून पहिल्या युग्माचीं पदें बदलून प्रमाण सम केलें. जसें,

११२ गा. : ८४ गा. = १२ दि. : इ. दि.

$$\text{इ. दि.} = ८४ \times १२ \div ११२$$

$$\text{इ. दि.} = \frac{\overset{३}{\cancel{८४}} \times \overset{३}{\cancel{१२}}}{\underset{१}{\cancel{\cancel{११२}}}} = ९.$$

∴ ९ दिवस हें उत्तर.

उ. ४ थें.—एक वाटसरू रोज ८ तास प्रमाणें चालून ३३ दिवसांनीं आपल्या गांवीं पोहोंचला. तो जर दररोज ६ तासप्रमाणें चालता, तर आपल्या गांवीं किती दिवसांनीं पोहोंचता ?

हा वाटसरू दररोज ८ तासांपेक्षां कमी तास चालता, तर पूर्वींची मजल होण्याला त्याला ३३ पेक्षां जास्ती दिवस लागते, असें हें प्रमाण व्यस्त ह्मणून फलराशि व इच्छाफल हीं ३ ऱ्या व ४ थ्या स्थलीं मांडून, फलाचा संबंधी राशि २ ऱ्या स्थलीं, व इच्छाफलाचा संबंधी पाहिल्या स्थलीं मांडला. जसा.—

६ ता. : ८ ता. : : ३३ दि. : इ. दि.

$$\text{इ. दि.} = \frac{३३ \times ८}{६} = \text{दि. हें उत्तर.}$$

उ. ५ वें. गव्हांच्या सोळुल्या खंडीला ३४ रु. पडतात, तर ४२५ रुपयांचा गहूं वारुळे मापी किती येईल ?

प्रश्नांतील सोळुली खंडी उत्तराच्या वारुळे मापांत नेतां,

३४ रु. : ४२५ रु. = वा. खं. ३१।१॥२ : उत्तर.

संक्षेपानें २ रु. : २५ रु. = वा. खं. ३१।१॥२ : उ.

अधिक रुपयांचें धान्य अधिक याव- यांचें, यास्तव प्रमाण सम आहे.

२५
∴ २|३३।१॥२ वा. खं.
१६॥३।१ हें उत्तर.

उ. ६ वें. १७ हं.वे. ३ का. १६ पौं. सातूला ८ पौं. १८ शि. ९ पे. पडतात, तर किती वजन सातू २ पौं. १६ शि. ३ पे. ह्या रकमेला मिळेल ?

सातूच्या वजनाचा बदल पैशाच्या सम प्रमाणांत व्हावयाचा ह्मणून असें प्रमाण मांडलें जातें कीं.—

पौं. शि. पे. : पौं. शि. पे. = हं. का. पौं.
८ १८ ९ : २ १६ ३ = १७ ३ १६ : उ.

२०   २०   ५
१७८ शि.   ५६ शि.   ८९ १ २४
१२   १२   ९
२१४५ पे. : ६७५ पे.   ११|८०५ ० २०
∴ ४२९ पे. : १३५ पे.   १३|७३ ० २२$\frac{२}{११}$
∴ १४३ पे. : ४५ पे.   ५ २ १४$\frac{६०}{१४३}$ हें उत्तर.
∴ ११ × १३ : ५ × ९

उ. ७ वें. ४$\frac{७}{८}$ औंस सोन्याला १९ पौंड १२ शिलिंग ६ पेन्स लंडनांत पडतात, तर ३ पौंड ११$\frac{२}{३}$ औंस सोनें तेथून मागविलें तर येथें किती रुपये किंमत पडेल ? १ शिलिंगाबद्दल येथें ११ आणे द्यावे लागतात.

१९ पौं. १२ शि. ६ पे. = ३९२॥ शि.

$$= \frac{३९२॥ \times ११}{१६} \text{ रु.} = \frac{८६३५}{३२} \text{ रु.}$$

किंमतीचा बद्दल वजनाशीं सम प्रमाणांत होतो. ह्मणून,

$$४\tfrac{७}{८} \text{ औं} : ४७\tfrac{२}{३} \text{ औं.} = \frac{८६३५}{३२} \text{ रु.} : \text{उ.}$$

प्र.नि. १ प्र. $\text{उ.} = \frac{८६३५}{३२} \text{ रु.} \times \frac{१४३}{३} \times \frac{८}{३९}$ [३२ → ४; १४३ → ११; ३९ → ३]

$$= \frac{९४९८५}{३६} \text{ रु.} = २६३८ \text{ रु. } ७ \text{ आ. } ६\tfrac{२}{३} \text{ पै.}$$

उ. ८ वें. ३१३० रुपयांवर १४६। रु. नफा पडला, तर १०० रु. वर नफा काय पडेल ?

मुद्दल कमी झाल्यानें नफा तितक्याबाच हिस्सा कमी व्हावयाचा. प्रमाण सम आहे. ह्मणून,

३२५० रु. मु : १०० रु. मु. = १४६। रु.नफा. : इच्छाफल.

$$\therefore \text{ इ } = \frac{५८५}{४} \times \frac{१००}{३२५०} = \frac{११७}{२६} = ४\tfrac{१}{२} \text{ रु. उत्तर.}$$ [५८५ → ११७; ४ → १; १०० → २५ → १; ३२५० → १३० → २६]

उ. ९ वें. १०० रुपयांचें १ महिन्याचें व्याज ·॥· येतें, तर ४०० रुपयांचें २५ महिन्यांचें व्याज काय येईल.

येथें १ महिन्याचें १०० चें व्याज १२ आणे येतें, तर एक महिन्याचें २०० चें व्याज २४ आणे होईल, म्हणजे मुदत एकच आहे, तर रुपयांच्या इतकेच पट व्याज वाढेल. म्हणून व्याज व रुपये यांचें प्रमाण सम मांडलें. जसें.--

$$१०० \text{ रु.} : ४०० \text{ रु.} :: \tfrac{३}{४} \text{ रु. व्या.} : \text{उ. व्या.}$$

$$१०० \times \text{उ. व्या.} = \tfrac{३}{४} \text{ रु व्या} \times ४०० = ३०० \text{ रु. व्या.}$$

$$\therefore \quad \text{उ. व्या.} = \tfrac{३००}{१००} \text{ रु. व्या.} \quad = ३ \text{ रु. व्या.}$$

आतां ४०० रुपयांचें १ महिन्याचें व्याज ३ रुपये येतें, तर २ महिन्यांचें व्याज ६ रुपये येईल. म्हणजे मुद्दल एकच आहे, तर महिने वाढतील तितकेच पट व्याज वाढेल. म्हणून व्याज व महिने यांचें प्रमाण सम मांडलें. जसें.—

१ म. : २५ : : ३ रु. व्या. : उ. व्या.

∴ उ. व्या. = ३ रु. × $\frac{२५}{१}$ = ७५ रु. व्याज. हें उत्तर.

ह्या एका उदाहरणांत दोन त्रैराशिकें आलीं आहेत हें लक्षांत ठेवावें.

उ. १० वें. गाडीच्या चाकाची त्रिज्या १ फूट १० इंच आहे, तर ४ मैलांच्या चालींत त्या चाकाचे किती फेरे होतील?

त्रिज्या १ फूट १० इंच आहे, तर व्यास $\frac{११}{३}$ फूट आहे. व्यास १ मान असला तर परिघ ३·१४१६ मानें असतो. म्हणून,

१ फू. व्या. : $\frac{११}{३}$ फू. व्या. = ३·१४१६ फू. प. : चा. प.

∴ प्र. नि. १ प्र. चाकाचा परिघ = ३·१४१६ फू. × $\frac{११}{३}$

= ११·५१९२ फू.

४ मैलांचे फूट हे ११·५१९२ ह्या चाकाच्या परिवाच्या फुटांनीं भागितां त्याचे फेरे येतील.

∴ चाकाचे ४ मैलांतले फेरे = $\frac{४ × ५२८० \text{ फू.}}{११·५१९२\text{फू.}} = \frac{५२८}{·२८७९८}$

= १८३३·४६ हें उत्तर.

उ० ११ वें. दोन वर्तुळाकार क्षेत्रांचे व्यास २ : ५ ह्या प्रमाणांत आहेत, आणि पहिल्याचें क्षेत्रफळ ३ बिघे आहे, तर दुसऱ्याचें क्षेत्रफळ किती एकर होईल ?

१००० बिघे = ८५१ एकर असतात. ह्मणून,

१००० बिघे : ३ बि. = ८५१ ए. : २·५५३ ए.*

वर्तुळांचीं क्षेत्रें व्यासांच्या वर्गांच्या सम प्रमाणांत असतात. म्हणून, $२^2 : ५^2$ :: २·५५३ : उत्तर.

∴ उत्तर = $\frac{२·५५३}{१} × \frac{२५}{४} = \frac{६३·८२५}{४}$.

= १५·९५६२५ ए.

$\frac{\times ४०}{३८·२५ \cdots \text{गु.}}$

$\frac{\times १३}{४· \cdots\cdots \text{आ.}}$

*अशा सांगांच्या प्रश्नांत ४ थ स्थलीं उत्तरच तोंडचें तोंडीं काढून मांडावें.

∴ ५ व्यासाच्या वर्तुळाचें क्षेत्र = १५ एकर ३८ गुंठे ४ आणे. हें उत्तर.

सूचना.—कांहीं प्रश्नांत नुसते प्रमाणाचे संबंध दिलेले असतात, त्यांपासून प्रमाणाचे प्रश्न उत्पन्न करून घ्यावे लागतात. तसेंच सामान्य संख्यांचे जागीं सावयव संख्या घेतल्या तर त्रैराशिकाचे आधारानें कित्येक बहुराशिकेंही सोडवितां येतात. तितकीं वेगवेगळीं त्रैराशिकें मांडावीं म्हणजे झालें. नमुन्याकारितां पुढें उदाहरण करून दाखविलें आहे.

उ० १२ वें. १० गाई व १२ म्हशी ह्यांना ५ दिवसांना ११२० पेंढ्या गवत लागलें, तर २ गाई व ४ म्हशी ह्यांना दरमहा खर्च काय लागेल ? गवताचा भाव शेंकडा ४॥ रु. प्रमाणें आहे, आणि २ म्हशींच्या इतकें गवत ३ गाईंना दररोज लागतें.

आतां २ ह्मशींचें खाणें = ३ गाईचें खाणें

तर १२ ह्मशींचें ,, = १८ गाईचें ,,

व ४ ह्मशींचें ,, = ६ गाईचें ,,

तसेंच १०० पेंढ्यांना $\frac{१९}{४}$ रुपये पडतात,

तर ११२० पेंढ्यांना, $\frac{१९}{४}$ रु $\times \frac{११२०}{१००}$ किंवा $\frac{२६६}{५}$ रु. पडतील.

ह्यावरून असा प्रश्न होतो कीं, १० गाई + १८ गाई ह्यांच्या ५ दिवसांच्या खाण्याला $\frac{२६६}{५}$ रु. पडतात तर २ गाई + ६ गाई ह्यांच्या ३० दिवसांच्या खाण्याला केवढा खर्च लागेल ?

१ गाईचें १ दिवसाचें खाणें हा एकं ह्मटला म्हणजे गाई व खाण्याचे दिवस ह्यांच्या गुणाकारांनीं ह्या एकंच्या संख्या दाखविल्या जातील. येथें परिमणासंख्या अवयवरूपी असल्यामुळें त्या तशा मांडण्यास हरकत नाहीं.

२८ × ५ गा. चें १ दि. चें खा. : ८ × ३० गा. चें १ दि. चें खा. : : $\frac{२६६}{५}$ रु. : इच्छाफल.

गाईच्या खाण्याच्या सम प्रमाणांत खर्च असावयाचा. म्हणून

$$इ. = \frac{\overset{३८}{\cancel{२६६}}}{५} रु. \times \frac{\overset{२}{\cancel{८}} \times \overset{६}{\cancel{३०}}}{\underset{७}{\cancel{२८}} \times \underset{१}{\cancel{५}}} = \frac{४५६}{५} रु. = ९१ रु. ३ आ. २\frac{२}{५} पै.$$

हें उत्तर.

उ० १३ वें. कांहीं काम १८ पुरुष १६ बायका आणि १२ मुलें मिळून २० दिवसांत करितात, तर त्याच्या २॥ पट काम १० पुरुष २१ बायका व १४ मुलें मिळून किती दिवसांत करितील ? ह्या प्रत्येकाकडून नेमलेल्या काळांत ४, २ व १ ह्या प्रमाणांत काम होतें.

वरील प्रमाणाअन्वयें सर्वांच्या जागीं मुलें घेतलीं तर,

१८पु + १६बा. + १२मु. = ७२मु + ३२मु. + १२मु = ११६ मु.

व १०पु. + २१बा. + १४मु. = ४०मु. + ४२मु. + १४मु. = ९६ मु.

यावरून असा प्रश्न येतो कीं, १ काम ११६ मुलांच्या २० दिवसांत होतें, तर २॥ कामें ९६ मुलांच्या किती दिवसांत होतील.

येथें एक मुलाचा एक दिवस (त्यांतील श्रम) हा एकं आहे, किंवा मुलें व दिवस हे एकंच्या संख्येचे अवयव आहेत, आणि कामाच्या सम प्रमाणांत मुलांच्या दिवसांचा (श्रमाचा) बदल व्हावयाचा आहे. ह्मणून —

१ का : $\frac{५}{२}$ का. = ११६ मुलांचे २० दि. : ९६ मुलांचे येणारे दि.

∴ ९६ दि = $\frac{११६ \times २०}{१}$ मु. चे दि. × $\frac{५}{२}$

∴ दि. = $\frac{७२५}{१२}$ मु. चे दि. = ६० $\frac{५}{१२}$ मु. चे दिवस. हें उत्तर.

उ० १४ वें. १५ मनुष्यें रोज १० तासप्रमाणें खपून २८ दिवसांमध्यें ८० यार्ड लांब, ११ फूट ३ इंच उंच, व २ फूट जाड भिंत बांधितात. तर ६० यार्ड लांब, १० फूट उंच, व १ फूट ६ इंच जाड, अशी भिंत बांधण्यास १२ मनुष्यें रोज ८ तासप्रमाणें किती आठवडे खपलीं पाहिजेत ?

येथें एक मनुष्याची एक तासाची मेहनत ही १ (एकं) ह्मटली, तर १५ मनुष्यांची १ तासाची मेहनत १५ एकं होईल, व त्यांची १० तासांची मेहनत १५ दाहीं १५० एकं होईल. तसेंच १ दिवसांत १५० एकं मेहनत होते, तर २८ दिवसांत २८ दीडशें एकं = ४२०० एकं होईल. ह्यावरून मनुष्यें, तास, व दिवस, हे मेहनतीच्या एकंचे अवयव दाखवितात हें उघड आहे. वरील

उदाहरणांत एकं शोधणें होतें, पण ह्या उदाहरणांत एकंचे संख्येंतील एक अवयव जें दिवस ते शोधणें आहेत, ह्मणून संक्षेप देण्याच्या सोईसाठीं ह्या परिमाणसंख्या अवयवरूपानें मांडल्या ह्मणजे बरें.

दुसरें, ४ फूट लांबींत ४ घनफूट राहतात, तसेंच ४ फूट लांबीच्या ३ फूट रुंदींत (४ × ३) १२ घनफूट राहतात, आणि ह्या चौकोनाच्या २ फूट उंचीमध्यें (४ × ३ × २) २४ घनफूट राहतात. ह्याप्रमाणें घनफळाच्या संबंधांत लांबी, रुंदी व उंची दाखविणाऱ्या परिमाणसंख्या ह्या केवळ पटी दाखविणाऱ्या असतात. म्हणून ह्याही संख्या अवयवरूपानें जोडून मांडाव्या म्हणजे संक्षेप देण्यास सोपें जातें.

तिसरें, लांबी, रुंदी व उंची ह्या संख्या एका मापाच्या असल्या, तरच त्यांचा गुणाकार त्या मापाच्या जातीचीं घनमानें दाखवील, म्हणून ह्या संख्यांना फुटाचें रूप दिलें पाहिजे.

आतां भिंत वाढली तर मेहनत वाढेल, व भिंत कमी झाली तर मेहनत कमी होईल. ह्याप्रमाणें मेहनतीचा बदल भिंतीच्या (घनफळाच्या) सम प्रमाणांत व्हावयाचा, म्हणून प्रमाण सम मांडलें. जसें.—

$$२४० \times ११\tfrac{१}{४} \times २ \text{ घ. फू.} : १८० \times १० \times १\tfrac{१}{२} \text{ घ. फू.}$$
$$:: १५ \times १० \times २८ \text{ दि.} : १२ \times ८ \times \text{उ. दि.}$$

$$\therefore १२ \times ८ \text{उ.} = \frac{१५ \times १० \times २८}{१} \text{ दि.} \times \frac{१८०}{१} \times \frac{१०}{१} \times \frac{३}{२} \times \frac{१}{२४०} \times \frac{४}{४५} \times \frac{१}{२}$$

$$\text{उ.} = \frac{१० \times ७ \times ३ \times १०}{१२ \times ८} = \frac{१७५}{८} = २१\tfrac{७}{८} \text{ दि.}$$

हे लोक दर आठवड्यास रविवाराखेरीज ६ दिवस खपावयाचे, म्हणून ह्यांना ३ आठवडे व $३\frac{७}{८}$ दिवस लागतील, हें उत्तर.

उ. १५ वें. कांहीं काम ४० मनुष्यें ५५ दिवसांत करतात. हीं मनुष्यें १५ दिवस खपल्यावर त्यांच्या मदतीस नवीं १० मनुष्यें मिळालीं, तर त्या ५० मनुष्यांकडून राहिलेलें काम किती दिवसांत पुरें होईल?

येथें ४० मनुष्यें ५५ दिवसांत १ काम करतात.
तर ४० ,, १ ,, $\frac{१}{५५}$ काम करतील.
व ४० ,, १५ ,, $\frac{१५}{५५} = \frac{३}{११}$ काम करतील.

राहिलेलें $\frac{८}{११}$ काम ४० + १० किंवा ५० मनुष्यांकडून व्हावयाचें. त्यावरून असा प्रश्न होतो कीं, $\frac{३}{११}$ काम ४० मनुष्यांच्या १५ दिवसांच्या मेहनतीनें होतें, तर $\frac{८}{११}$ काम ५० मनुष्यांच्या किती दिवसांच्या मेहनतीनें होईल ?

येथें १ मनुष्याचा १ दिवस हा मेहनतीचा एकं ह्मटला असतां, मनुष्यें व दिवस हे त्याचे अवयव होतात. तसेंच मनुष्यांच्या दिवसांचा (ह्म० मेहनतीचा) बदल कामाच्या सम प्रमाणांत व्हावयाचा. ह्मणून,

$$\frac{३}{११} \text{ का.} : \frac{८}{११} \text{ का.} = ४०. \text{ म.} \times १५ \text{ दि.} : ५० \text{ म.} \times \text{उ. दि.}$$

$$\therefore ३ \text{ का.} : ८ \text{ का.} = ४० \text{ म.} \times १५ \text{ दि.} : ५० \text{ म.} \times \text{उ. दि.}$$

$$\therefore \cancel{५०}\text{म.} \times \text{उ. दि.} = \frac{\cancel{४०}\text{म.} \times \cancel{१५} \text{ दि.}}{१} \times \frac{८}{\cancel{३}}$$

$$\therefore \text{उ. दि.} = \frac{४ \times ८}{१} \text{ दि.} = ३२ \text{ दि. हें उत्तर.}$$

उ. १६ वें. एक घड्याळ १ दिवस १४ तास ४५ मिनिटांनीं २। मिनिटें पुढें जातें. ह्या घड्याळानें रविवारीं अवशीचे ७ वाजतांना बरोबर वेळ दाखविण्यासाठीं, हें शुक्रवारीं बारांची तोफ होतेवेळीं किती मागें लावून ठेवावें ?

शुक्रवारच्या दुपारच्या तोफेपासून रविवारीं अवशीचे ७ वाजत तोंपावेतों ५५ तास होतात. १ दि. १४ ता. ४५ मि. = $३८\frac{३}{४}$ ता. = $\frac{१५५}{४}$ तास होतात. घड्याळाचें पुढें जाणें हें तासांच्या सम प्रमाणांत व्हावयाचें. घड्याळ जितकें पुढें जाईल तितकें मागें लाविलें पाहिजे. ह्मणून,

$$\frac{१५५}{४} \text{ ता.} : ५५ \text{ ता.} = \frac{९}{४} \text{ मि. पु. जाणें} : \text{उ. मि. पु. जाणें.}$$

$$\therefore \text{उ.} = \frac{९}{\cancel{४}} \text{ मि. पु. जा.} \times \frac{\cancel{५५}}{१} \times \frac{\cancel{४}}{\cancel{१५५}} = \frac{९९}{३१} \text{ मि. पु. जा.}$$

$$= ३ \text{ मि. } ११\frac{१९}{३१} \text{ से. हें उत्तर.}$$

उ. १७ वें. एक घड्याळ १२ तासांत ७ सेकंद पुढें जातें,

आणि दुसरें घड्याळ १२ तासांत ६ सेकंद मागें पडतें. हीं घड्याळें एके दिवशीं दुपारचे १२ वाजतांना बरोबर आहेत, तर ह्यामध्यें अर्ध्या तासाचें अंतर केव्हां पडेल ? व तेव्हां प्रत्येक घड्याळ कोणता वेळ दाखवील ?

हीं घड्याळें १२ वाजतां बरोबर आहेत. तेव्हांपासून १२ तासांनीं ह्यांत १३ सेकंदांचें अंतर पडतें, व एका दिवसांत किंवा २४ तासांत ह्यामध्यें २६ सेकंदांचें अंतर पडतें. ह्या दरानें ३० × ६० सेकंद अंतर पडण्यास किती वेळ लागेल हें शोधणें आहे.

∴ २६ से. अं. : ३० × ६० से. अं. = १ दि. : उ. दि.

$$∴ \text{उ. दि.} = \frac{\text{१ दि.}}{\text{१}} \times \frac{\text{३० × ६०}}{\text{२६}} = \frac{\text{९०० दि.}}{\text{१३}}$$

$$= \text{६९ दि. ५ ता. ३२}\tfrac{\text{४}}{\text{१३}} \text{ मि.}$$

म्हणजे दोन्ही घड्याळें बरोबर असल्यापासून ६९ दि. ५ तास ३२$\frac{४}{१३}$ मि. इतक्या काळानें त्या घड्याळांत अर्ध्या तासाचें अंतर पडेल.

आतां १ लें घड्याळ १ दिवसांत १४ सेकंद पुढें जातें म्हणून $\frac{९००}{१३}$ दिवसांत $\frac{९००}{१३}$ × १४ सेकंद पुढें जाईल. म्हणजे १६$\frac{२}{१३}$ मिनिटें पुढें जाईल. तसेंच दुसरें घड्याळ $\frac{९००}{१३}$ दिवसांत $\frac{९००}{१३}$ × १२ सेकंद किंवा १३$\frac{११}{१३}$ मिनिटें मागें राहील.

∴ १ लें घड्याळ ५ ता. ४८$\frac{६}{१३}$ मि. दुपारानंतरची वेळ दाखवील हें १ लें उ.

व २ रें घड्याळ ५ ता. १८$\frac{६}{१३}$ मि. दुपारानंतरची वेळ दाखवील हें २ रें उ.

उ. १८ वें. एका मिनिटांत ३३ हजार फुटपौंड काम करणाऱ्या वाफेच्या सामर्थ्याला १ घोड्याची शक्ति म्हणतात, तर ८ तासांत ४१२५ टन ओझें ४ यार्ड उंचीवर नेणाऱ्या स्टीम इंजिनची (वाफेच्या यंत्राची) शक्ति किती घोड्यांची म्हटली जाईल ?

१ पौंड वजन १ फूट उंच चढविणें ह्याला एक काम ह्मणतात, व हे कामाचे एकं (माप) फुटपौंड ह्या नांवानें दर्शवितात. एका मिनिटांत ३३००० फूटपौंड काम करण्याचें जें वाफेच्या यंत्राचें सामर्थ्य त्याला १ घोड्याची शक्ति ह्मणतात. ह्या लक्षणावरून फूट व पौंड ह्यांच्या ज्या संख्या त्या कामाच्या संख्येचे अवयव होतात, आणि मिनिटें व कामाचे एकं ह्यांच्या ज्या संख्या त्या घोड्याची शक्ति दाखविणाऱ्या संख्येचे अवयव होतात, ह्मणून यार्ड, टन, व तास ह्यांना फूट, पौंड व मिनिटें ह्यांचीं रूपें देऊन त्या संख्या शक्ति व काम ह्यांचे अवयव समजल्या पाहिजेत. घोड्याच्या शक्तीचा बदल कामाच्या समप्रमाणांत व्हावयाचा. ह्मणून

फू. पौं. फू. पौं.

१ × ३३००० : ४ × ३ × ४१२५ × २० × ११२

मि. घो. श. मि. घो. श.

: : १ × १ : ८ × ६० × क्ष.

$$\therefore \quad \text{क्ष} = \frac{४ \times ३ \times ४१२५ \times २० \times ११२ \times १}{३३००० \times ८ \times ६०} \text{ घो. श.}$$

$\therefore$ क्ष = ७ घो. श. हें उत्तर.

उ. १९ वें. ६० तोफांच्या ५ पाळ्या ८ मिनिटांत होत गेल्यानें ७५ मिनिटांस ३५० मनुष्यें मरतात. ह्यावरून किती तोफांच्या ७ पाळ्या ९ मिनिटांत होत गेल्या तर २५ मिनिटांस १८० मनुष्यें मारतां येतील ?

८ मिनिटांत ६० तोफांच्या ५ पाळ्या होतात, तर १ मिनिटांत ६० तोफांच्या $\frac{५}{८}$ पाळ्या होतील. अर्थात ७५ मिनिटांत ६० तोफांच्या $\frac{५}{८}$ पाळ्यांच्या ७५ पट पाळ्या होऊन, त्यांनीं ३५० मनुष्यें मरतात. ह्याच रीतीनें २५ मिनिटांत इष्ट तोफांच्या $\frac{७}{९}$ पाळ्यांच्या २५ पट पाळ्या होऊन त्यांनीं १८० मनुष्यें मारणें आहेत. ह्मणून,

३५० म. : १८० म. = ६० तोफा × $\frac{५}{८}$ × ७५ : क्ष तोफा × $\frac{७}{९}$ × २५.

$$\therefore \text{क्ष तोफा} \times \frac{७}{९} \times २५ = \frac{६० \text{ तोफा}}{१} \times \frac{५}{८} \times \frac{७५}{१} \times \frac{१८०}{३५०}$$

∴ क्ष. तो. $= \frac{\text{६० तो.}}{१} \times \frac{५}{८} \times \frac{७५}{१} \times \frac{४८०}{३५०} \times \frac{९}{७} \times \frac{१}{२५} =$ ४०५ तो.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ह.

१. २५ आंबे ६ आण्यांस मिळतात तर १८ चे आंबे किती येतील ?

२. २ दिडक्यांस बरू ५ येतात, तर १०० बरूंस काय पडेल ?

३. ५ घोड्यांची किंमत ५० बकऱ्यांबरोबर आहे, तर ७५० बकऱ्यांबद्दल घोडे विकत घेतल्यास किती येतील ?

४. एक घड्याळ दररोज ५ मिनिटें मागें पडतें, तर एका आठवड्यांत तें किती मागें पडेल ?

५. एक झाड २० फूट उंच असून त्याची सावली २५ फूट पडत आहे, तर ज्या घराची सावली ७५ फूट पडत आहे त्याची उंची किती असली पाहिजे ?

६. एक काम ६० मजूर ४० दिवसांत करतात, तर तेंच काम २० दिवसांत करणें झाल्यास किती मजूर लावावे ?

७. १२ हात कापडास १५ रुपये पडतात, तर ८ हात कापडास काय पडेल ?

८. १२ मण धान्यास १६ रुपये, तेव्हां ७२ रुपयांस किती धान्य येईल ?

९. ९० शेर काकवीस काय द्यावें ? जर ४९५ शेर काकवीस ३९६ रुपये द्यावे लागतात.

१०. ६३ रुपये सारा दिल्यानें किती बिघे जमीन लावणीस मिळेल ? जर १७२ बिघ्यांस ३७३ रुपये सारा पडतो.

११. २५ तोळे अर्गज्यास काय द्यावें ? ८० तो० १७६ रु. पडतात.

१२ ३८५ यार्ड वस्त्रास ६३ रुपये पडतात, तर १८ रुपयांस किती यार्ड वस्त्र येईल ?

१३ २०५ रुपयांस किती वार फलानेल येईल ? ५१ वारांस ८५ रुपये पडतात.

१४. ३६ एकर ३ गुंठे, ह्यांस ४२ रुपये सारा पडतो, तर २१ एकर ३ गुंठे १४ आणे इतक्या जमिनीचा सारा किती द्यावा लागेल ?

१५. वजन १०॥८२॥ साखर ५१ रुपयांस घेतली, तेव्हां ह्या भावानें ४॥२८॥ साखरेस काय पडेल ?

१६. रु. २०१॥– ह्यांची ४१ पल्ले बाजरी येते, तर ६४।≈ ह्यांची किती येईल ?

१७. कैली ४७२॥३।२ जोंधळ्यास १२८०।–। रुपये पडतात, तर ७।२॥। जोंधळ्यास काय पडेल ?

१८. १८ बिघ्यांचें शेत २४॥।≈ सारा दिला असतां मिळतें, तर ह्या मानानें ४२ बिघे जमिनीचा सारा किती द्यावा लागेल ?

१९. एका गड्यास वर्षभर चाकरीबद्दल २५ रुपये द्यावे लागतात, तर त्यानें ८५ दिवस काम केल्याबद्दल त्यास काय द्यावें ?

२०. एका गाडीस १० कोसांचें भाडें १॥।– द्यावें लागतें, तर २॥।≈॥ भाड्यांत गाडी किती लांब जाईल ?

२१. सुताच्या कारखान्यांत २ अवर ४६ मिनिटांत, यंत्रानें ५४ पौंड कापूस पिंजून बाहेर येतो; तर २४ पौंड कापूस पिंजून बाहेर येण्यास किती वेळ लागेल ?

२२. रु. ७०॥–। दिल्यानें किती एकर जमीन लावणीस मिळेल ? पांच एकर जमिनीस ४।॥– पडतात.

२३. २० बिघे जमिनीस सरकारांत सारा किती द्यावा लागेल ? ४४४ बिघ्यांस १४ रु. १४ आ. ३$\frac{१}{३}$ पै पडतात.

२४. २५ रुपये भाड्याच्या उत्पन्नास घरपट्टी २॥· रुपये पडते, तेव्हां ९५॥–।· भाड्याच्या उत्पन्नास किती घरपट्टी पडेल ?

२५. ९५ पौंड, १० शि. ९॥ पेन्स ह्या रकमेवर धर्मादाय खर्च किती मिळेल ? ७९१ पौंड, १३ शि. ४ पेन्स ह्यांजवर धर्मादाय खर्चास ३९ पौंड ११ शि. ८ पेन्स मिळतात.

२६. एका गांवचें उत्पन्न २०० रुपये आहे आणि चिल्हर खर्चाबद्दल १० रु. ७ आणे ६ पै मिळतात, तेव्हां दर रुपयास किती खर्च बसेल ?

२७. ज्या घराचें भाडें २५ गिनी येतें त्यावर गांवदुरुस्तीबद्दल ४ पौंड ११ शिलिंग १०॥ पेन्स कर आहे, तर ज्या घराचें भाडें ६५ पौंड १० शि. ६ पेन्स येतें त्यावर कर किती बसेल ?

२८. १०० मनुष्यें १२ दिवसांत जें काम करतात तेंच काम ८ दिवसांत संपवावयाचें आहे, तर किती मनुष्यें लावावीं ?

२९. शत्रूच्या वेढ्यांत सांपडलेल्या किल्ल्यांत दर मनुष्यास दररोज अडीच शेरप्रमाणें अन्न दिल्यास चार महिनेपर्यंत पुरेल इतकें अन्न शिल्लक आहे, तर तें दर मनुष्यास रोज एक शेर प्रमाणें दिल्यास किती दिवस पुरेल ?

३०. एका मनुष्याचे मीं ३०० रुपये ८ महिने उसने ठेविले होते. पुढें त्यास गरज लागली, तेव्हां त्याचा उपकार फेडावा ह्मणून मीं त्यास २०० रुपये दिले, तर हे त्याजकडे किती दिवस ठेवावे ?

३१. जें काम १०८ मनुष्यें २६६ दिवसांत करतात, तें काम १६८ दिवसांत करावयाचें तर किती मनुष्यें लावावीं ?

३२. कोणी वाटसरू रोज १२ तास चालून ३ आठवड्यांत एका गांवीं पोहोंचतो; तो जर रोज ९ तास चालला तर त्यास त्या गांवीं पोहोंचण्यास किती दिवस लागतील ?

३३. ४७$\frac{1}{4}$ रुपयांच्या, चवलाच्या दराच्या गांठ्या करावयास अर्धा मण साखर लागते, तर तितक्याच साखरेच्या ७० गांठ्या केल्यास एका गांठीची किंमत काय होईल ?

३४. २७ रुपये बिघा दराची जमीन देऊन ३५ रुपये बिघा दराची ४८० बिघे जमीन घ्यावयाची आहे, तर २७ रुपये दराची जमीन किती बिघे द्यावी ?

३५ शत्रूच्या वेढ्यांत सांपडलेल्या एका किल्ल्यांत अन्न दररोज दर मनुष्यांस अडीच शेर प्रमाणें दिल्यास तीन महिने पुरेल इतकें आहे, तर तें अन्न आठ महिने पुरविणें झाल्यास दररोज दर मनुष्यास किती द्यावें ?

३६. ४० फरे मिठास १७५ रु. ५ आ. ४$\frac{1}{2}$ पै पडतात, तर २५ फरे मिठाचें काय झालें ?

३७. २३५ गाईंस १२५७॥= किंमत पडते, तर २० गाईंस काय पडेल ?

३८. एका सावकाराचें दिवाळें निघालें, तेव्हां त्याची मालमत्ता विकली. तिचे ११८१० रुपये आले, आणि लोकांचें देणें ४७२६५ रुपये होतें, तेव्हां दामाशाईप्रमाणें दर रुपयास काय येईल?

३९. एका व्यापारांतल्या $3\frac{3}{4}$ भागांस जर २७५ रुपये पडतात, तर $4\frac{5}{12}$ भागांस काय पडेल ?

४०. वजनी ५॥२॥७॥· लोखंडास ५९॥= पडतात, तर दोन खंडी लोखंडास काय पडेल ?

४१. ३७४॥ रुपयांची साखर किती येईल? ८।५॥ वजन साखरेस किंमत १०॥= पडते.

४२. २३५ रु. ७ आ. ८ पै उत्पन्नावर कर ५८ रु. १३ आ. ४ पै आहे, तर ह्या मानानें एक रुपयास काय पडेल ?

४३. ३१ रु. ४ आ. ११ पै ह्यांचे ८९ शेर तूंप येतें तर ११७ रु. १२ आ. ३ पै ह्यांचें तूप किती येईल ?

४४. कैली १५८४८२ बाजरीस किंमत रु. २१५८४८१ पडते, तर रु. ५८३८२ ची बाजरी किती येईल तें सांगा.

४५. दर शेरास ६ आणे प्रमाणें साखरेचा दर होता, तेव्हां १५ आण्यांच्या एका गांठीचें वजन अडीच शेर भरत होतें. आतां साखरेचा भाव शेरास ५ आणे झाला आहे, तर त्याच किमतीच्या एका गांठीचें वजन किती असावें ?

४६. एकानें १,२१,००,००० मेंढरें लोंकरीकरितां पाळलीं आहेत, त्यांपासून प्रतिवर्षी उत्पन्न किती होईल तें सांगा. ११ मेंढरांची लोंकर साडेबारा शेर निघते, व तिचे ८ रुपये १२ आणे येतात.

४७. ३ टन ५ हंड्रेडवेट यांतून १ टन १६ हंड्रेटवेट ३ कार्टर १२ औंस वजा करा. आणि बाकी राहील तिची १ का. २७ पौंड ह्यांस १ पौं. ७ शि. ६ पेन्स ह्या दरानें किंमत काढा.

४८, एका जहागीरदाराच्या जमिनीचें उत्पन्न ८०,५००

रुपये आहे, आणि त्यांतून उत्पन्नाचे दर शेंकड्यास ११।ऽ सरकारांत द्यावे लागतात, तेव्हां त्यास वास्तविक उत्पन्न किती ?

४९. ४$\frac{३}{४}$ यार्ड वस्त्रास ५ पौं. १४ शि. ४$\frac{१}{२}$ पेन्स पडतात, तर १२ यार्ड वस्त्रास काय पडेल तें सांगा.

५०. १$\frac{२}{३}$ हात बनातीस १॥ऽ पडतात, तर २४॥ हात बनातीस काय पडेल ?

५१. २$\frac{३}{८}$ मण साखरेस ७५ रुपये दिले, तर १७$\frac{३}{४}$ मणांस काय द्यावें ?

√५२. जमीन मोजणीची सांखळी ६६ फूट लांब असते, आणि तींत १०० कड्या असतात, त्या प्रत्येक कडीला लिंक ह्मणतात. आतां शेताचा एक बांध २४५६ लिंक लांब आहे, तर त्यांचे फूट किती भरतील ?

५३. एका गांवचें उत्पन्न १५६० रुपये आहे, आणि चिल्हर खर्चाबद्दल त्यांतून २७।ऽ॥ काढावयाचे आहेत, तर ज्याचें उत्पन्न ५२५ रुपये आहे त्यावर चिल्हर खर्चाची वांटणी काय येईल ?

५४. एक सोन्याचा दागिना वजन तोळे १४।२॥; किंमत २१४॥ रुपये असा आहे. तेव्हां दर तोळ्यास काय पडेल ?

५५. ४।॥ शेरांस दहा आणे ह्या दरानें १४$\frac{३}{८}$ शेरांस काय पडेल ?

५६. २$\frac{१}{४}$ यार्ड वस्त्रास ।ऽ पडतात तर, ५० हात वस्त्रास काय पडेल ?

५७. कोणा एकाचें दिवाळें निघालें, तेव्हां त्याचें देणें ३२२५ रुपये होतें, आणि येणें १०५० रुपये होतें, तेव्हां दामाशाईप्रमाणें सावकारास दर रुपयास काय मिळेल ?

५८. ६$\frac{२}{३}$ यार्ड मलमलीस १ पौं. ७ शि. ९$\frac{१}{२}$ पेन्स पडतात, तर ४$\frac{३}{८}$ यार्ड मलमलीस काय पडेल ?

५९. एका तारवाचे $\frac{३}{७}$ ची किंमत काय द्यावी ? $\frac{५}{८}$ ची किंमत २५५ रुपये झाली आहे.

६०. एका गृहस्थानें आपली जिनगी ९८० रुपयांस विकून

दर रुपयास ।॥≈ देऊन त्यानें आपलें कर्ज फेडलें, तेव्हां त्यास कर्ज किती होतें ?

६१. एक रुपयाचे उत्पन्नावर ०-॥ कर आहे, तेव्हां ज्यावर १३०= कर आहे त्याचें उत्पन्न किती तें सांगा.

६२. बपासून अनें १७५। रुपये १०२ दिवसांच्या मुदतीनें घेतले होते, तो उपकार फेडावा ह्मणून बला गरज लागली तेव्हां त्यास अनें २१०॥ रुपये उसने दिले, ते त्यानें त्याजकडे किती दिवस ठेवावे ?

६३. एका भिंतीस ३। फूट लांबीचे चिरे ६३३६ आहेत. आतां तितकीच दुसरी भिंत बांधावयाची, परंतु चिरे २$\frac{३}{६}$ फूट लांबीचे आहेत, तर ते किती लागतील ?

६४. एका इमारतीची सावली मोजली ती १२६ फूट भरली. आतां त्याच वेळेस उन्हांत ६॥ फूट लांबीची काठी उभी केली, तिची सावली ५। फूट पडली, तेव्हां इमारत किती हात उंच आहे ?

६५. एक धोंडा हातांतून सोडला तो पडत असतां ३$\frac{३}{५}$ सेकंदांचे शेवटीं ११५$\frac{१}{३}$ फूट जाण्याचा वेग त्याचे अंगीं होता; ह्यावरून पहिल्या सेकंदाच्या शेवटीं व ४$\frac{३}{४}$ सेकंदांच्या शेवटीं त्याचे अंगीं किती किती वेग होते ?

६६. एक बैलाची गाडी दर तासांत ३ मैल प्रमाणें चालत असतां २४ तासांत पुण्याहून कल्याणास पोहोंचते. आतां आगीची गाडी दर तासांत ३२ मैल चालते, तेव्हां ती कल्याणास किती वेळांत पोहोंचेल ?

६७. दिल्ली शहरास शत्रूचा वेढा पडला, तेव्हां त्यांत २२४० मनुष्यांस ३ महिने पुरे इतकें अन्न होतें, परंतु वेढा ७ महिने उठत नाहीं असें कळत आहे, तर त्यांतून किती मनुष्यांस बाहेर लावून द्यावें, ह्मणजे बाकीच्यांस तें अन्न पूर्वीप्रमाणें ७ महिने पुरेल ?

६८. एक चाकर २० दिवसांचे ३॥ रुपये द्यावे अशा करा-

रानें ठेवला आहे, तर १२। रुपयांत त्यापासून किती दिवस काम घ्यावें ?

६९. १५॥ मण ओझें ६० मैल नेण्यास भाडें १॥ रुपया द्यावें लागतें, तर तितकेच भाड्यांत ३। मण ओझें किती लांब जाईल ?

७०. एका गृहस्थास आपल्या ४५०० रुपये वेतनांतून ५२५ रुपये वर्षास शिल्लक ठेवावयाचे आहेत, तर त्यानें ७३ दिवसांत खर्च किती करावा ? वर्ष ह्मणजे ३६५ दिवस.

७१. विलायतेंत १३$\frac{३}{८}$ टन वजन माल ५०० गिनीला घेतला, व तो मुंबईस आणावयास ३० रुपये खर्च लागला. तेव्हां तो माल मुंबईस किती रुपये शेर (कच्चा) विकावा ? एक गिनी =१०॥रुपये.

७२. १ खंडी ३ मण १५ शेर लोखंड मुंबईहून पुण्यास न्यावयाचें भाडें १२॥~ पडतें. आतां आमचीं चार लोखंडी यंत्रें एकंदर वजन २॥३॥४॥ आहेत त्यांस भाडें काय द्यावें लागेल ?

७३. एका गृहस्थास ९००० रुपये कर्ज आहे, आणि त्याच्या जिमगीचें उत्पन्न ३५१५॥। रुपये झालें. तेव्हां सावकारास बामाशाईप्रमाणें दर रुपयास काय मिळेल, व ज्याचे ७५० रुपये येणें आहेत त्यास तोटा किती येईल ?

७४. रु. २७१९८२८८ चें ७७ दिवसांचें व्याज रु. ३१८१३८८ पडतें, तर त्याच रकमेचें २४५ दिवसांचें व्याज काय पडेल ?

७५. रु. २३२५॥।- चें १० महिन्यांचें व्याज १०१।-॥२ पडतें, तर एवढेंच व्याज १७ महिन्यांत पडण्याला रकम केवढी पाहिजे ?

७६. ४ शि. १०$\frac{१}{२}$ पे. किमतीचे रिक्स डालर ५५९२६ देणें आहेत. ह्यांबद्दल ४ शि. ११$\frac{३}{४}$ पे. किमतीचे ग्रुकेत किती द्यावे ?

७७. एका शिंप्यानें पौं. १. ९. ३$\frac{३}{४}$ ह्यांस १$\frac{३}{४}$ यार्ड ह्याप्रमाणें १४७ यार्ड कापड विकून पौं. १६ . १० . ९ नफा मिळविला, तर त्याची मूळ खरेदी केवढ्याची होती ?

७८. ६३८ मनुष्यांच्या फौजेला १२४ दिवस पुरेसें अन्न आहे. त्या फौजेंत ४१८ मनुष्यें नवीं भरलीं, तर ह्या एकंदर फौजेला तें अन्न किती दिवस पुरेल ?

७९. एका सीक्विनची किंमत ९ शि. ४॥ पे असून एका कार्लिनोची किंमत पौं. ५· १२· ३। आहे, तर ४५० कार्लिनोबद्दल सिक्विन किती द्यावे ?

८०. एका वाण्यानें २ टन ३ हंड्रेडवेट ३ क्वार्टर साखर १२० पौंडांस विकत घेतली, आणि भाडें वगैरे खर्चाबद्दल ५० शिलिंग दिले. ह्या व्यापारांत ६१ पौं. ५ शि. नफा करणें आहे, तर त्यानें दर हंड्रेडवेट साखरेवर दर काय ठेवावा ?

८१. गव्हांचा भाव दर बुशिलास ७ शि. १॥ पे. प्रमाणें असतो, तेव्हां ४ पेन्सांचा पांव २ पौंड ३ औंस भरतो. ह्यावरून गव्हांचा भाव दर बुशिलास ७ शि. ११ पे. प्रमाणें असेल, तेव्हां ४ पेन्सांचा पांव किती वजन भरेल ?

८२. एका गृहस्थापाशीं दर पौंडास ७ पेन्सप्रमाणें प्राप्तीचा कर जातां पौं. २४९· १९· ९½ शिलक राहिली, तर त्याची प्राप्ति काय होती ?

८३. एका इनामदारानें प्राप्तीच्या कराबद्दल १८ पौं. १५ शि. पहिल्या वर्षीं सरकारांत भरले. पुढील वर्षीं वाढविलेला कर दर पौंडास ९ पेन्स प्रमाणें सरकारांत घेतला, तेव्हां त्याला ५२ पौंड १० शि. भरावे लागले ह्यावरून त्याचें इनामी उत्पन्न केवढें होतें ? आणि पहिल्या वर्षीं कोणत्या दरानें कर बसविला होता ?

८४. एक घड्याळ सोमवारीं १२ वाजतां १० मिनिटें पुढें असून, तें प्रत्यहीं ३ मिनिटें १० सेकंद फाजील चालतें; तर तें येत्या शनवारीं सकाळचे १० वाजतांना केवढा काल दाखवील ?

८५. ११५ ग्यालनांच्या द्राक्षीच्या पिंपाला पौं. ९७ शि. १५ पडतात, तर एक ग्यालनांत ज्या बाटल्या ६·४ भरतात त्यांच्या दर एक डझनाला काय पडेल ?

८६. गहूं ५५·५ शिलिंगांस कार्टर विकतो, तेव्हां ६ पेन्सांचा पांव ३·४३७५ पौंड भरतो. हल्लीं ह्या किमतीचा पांव २·८१२५ पौंड भरत आहे, तर गव्हांचा दर काय आहे ?

८७. जर्मन मैलाचे ·२१३६ इतका इंग्लिश मैल असतो. तर जो मनुष्य दर तासास ४ इंग्लिश मैल चालतो, तो एक जर्मन मैल केवढ्या वेळांत चालेल ?

८८. १००० मनुष्यांच्या फौजेला २८ दिवसांची अन्नसामुग्री ठेवलेली होती. ११ दिवसांनीं तिच्या मदतीस नवी फौज आल्यामुळें ती सामुग्री ५ दिवसांत खपली, तर मदत आलेल्या फौजेंत किती लोक होते ?

८९. एका खेड्याचा वसूल १५६८५ पौं. १५ शि. असून ह्या खेड्यावर २१३७ पौं. ८ शि. ९ पे. नवीन कर बसविण्याचें ठरलें आहे. तर वसुलाचे प्रत्येक पौंडावर फार्दिंगापावेतों ठोक सुमारानें काय कर बसविला पाहिजे? आणि पौं. ५४३–१२–८ वसुलावर काय कर बसेल ?

९०. ३२ पौंडर तोफेचें वजन ३ टन ४ हं. वे. असतें. आणि १८ पौंडर तोफेचें वजन २ टन २ हं. वे. असतें. तर किती १८ पौंडर तोफा ३२ पौंडर जातीच्या १८९ तोफांच्या वजनाइतक्या वजन भरतील ?

९१. ४ पुरुष १५ तास प्रमाणें खपले, ३ पुरुष १२ तास प्रमाणें खपले, आणि ८ पुरुष ३ तास प्रमाणें खपले, तेव्हां त्यांना ३ पौं. ५ शि. दिले आहेत. तर एक पुरुष दररोज ११ तास प्रमाणें ६ दिवस खपला आहे, त्याबद्दल त्यास काय द्यावें ?

९२. नेमलेल्या काळांत ४ पुरुष जेवढी मजुरी मिळवितात, तेवढीच ७ बायका मिळवितात. आतां ५८ पुरुष आणि १४ बायका ह्यांनीं मिळून ४२ पौं. ७ शि. मिळविले आहेत, तर २० पुरुष व किती बायका मिळून २७ पौं. ४ शि. ६ पे. मिळवितील ?

९३. एका देशांत १३०००००० मेंढ्या आहेत, तर दर मेंढीस किंमत १५ शि. प्रमाणें सर्व मेंढ्यांची किंमत काय होईल ?

९४. एका कुरणांतलें गवत ७ बैल किंवा ११ घोडे ३७ दिवसांत खातात, तर तें ५ बैल आणि ८ घोडे किती दिवसांत खातील?

९५. ३ पौंड ७$\frac{3}{4}$ औंस कापसाचें सूत २६४ मैल १०१० यार्ड लांब होतें. तर भूगोलाभोंवतीं २५००० मैलांचा वेढा देण्याला किती वजनाचें सूत लागेल ?

९६. १२ बैल आणि ३५ मेंढ्या ४ दिवसांत ६ टन ७ हं. वे. गवत खातात, तर ४ बैल आणि ६ मेंढ्या ह्यांना दर आठवड्यास खर्च काय लागेल? १ टन गवतास ३७ रु. ८ आ. पडतातें, आणि नियमित काळांत २ बैलांइतकें गवत ५ मेंढ्या खातात, असें घ्या.

९७. एका दिवसांत एक घड्याळ ४ मि. १७ से. फाजील चालतें. आणि दुसरें ३ मि. १३ से. मागें पडतें. हीं घड्याळें गेल्या सोमवारीं दुपारचे १२ वाजतांना खऱ्या वेळेशीं २॥ मिनिटांचे फरकानें असून, पहिलें पुढें व दुसरें मागें अशीं होतीं. हल्लीं अर्ध्या तासाचें अंतर दोहोंमध्यें पडलें आहे, तर हल्लींचा वार आणि तास सांगा.

९८. ३० शिलिंगांस क्वार्टरप्रमाणें ओट (नांवाचा दाणा) विकतो, तेव्हां एका घोड्याचा दर आठवड्याचा खर्च १७ शि. ६ पे. पडतो. परंतु २६ शिलिंगांस क्वार्टरप्रमाणें ओट विकतो, तेव्हां हा खर्च १६ शि. २। पे. पडतो. ह्यावरून घोडा उभ्या वर्षांत किती ओट खातो ?

९९. ५ घोडे व १२ खेंचरें मिळून २५८९६ पौं. ओझें नेमलेल्या लांबीवर नेतात, तर ९ घोड्यांचे मदतीस किती खेंचरें दिलीं असतां ३३७ हं. वे. ३ क्वार्टर. २० पौं. ओझें नेमलेल्या लांबीवर नेतां येईल ? एक खेंचर एका घोड्याच्या $\frac{2}{3}$ पट ओझें नेतें.

१००. गुरुवारीं सकाळीं दोन घड्याळांत एकदम ९ वाजतात

आणि बुधवारीं सकाळीं पहिल्यांत ११ ला १० मि. कमी असतां दुसऱ्यांत ११ वाजतात, तर त्या संध्याकाळीं दोहोंमध्यें एकदम ९ वाजण्यासाठीं मंदाचा कांटा किती पुढें सारावा, अगर जलदाचा कांटा किती मागें सारावा ?

१०१. १५ पुरुष, १२ बायका, व ९ मुलें, ५० दिवसांत कांहीं काम करितात. तर त्याच्या दुप्पट काम ९ पुरुष, १५ बायका, व १८ मुलें, किती दिवसांत करितील ? १ बायको = २ मुलें, व १ पुरुष = ३ मुलें.

१०२. कांहीं काम ४ पुरुष, किंवा ६ बायका किंवा ९ मुलें २७॥ दिवसांत करितात, तर तें काम (१) ४ पुरुष व ९ बायका किती दिवसांत करितील? आणि (२) ५ पुरुष व ८ मुलें किती दिवसांत करितील ?

१०३. १ ग्रेन सोनें पिटलें तर त्याचा वर्ख ५६ चौ. इं. क्षेत्राचा होतो, तर असले वर्ख १ इंच उंचींत किती राहतील? १ घनफूट सोनें १० हं. वे. ३ क्का. ११ पौंड वजन भरतें.

१०४. गाडीच्या पुढच्या व मागच्या चाकांचे व्यास १॥ फूट व २॥ फूट अनुक्रमें आहेत, तर मागच्याच्या फेऱ्यांपेक्षां पुढच्याचे फेरे ५६० अधिक होण्याला ती गाडी किती लांब गेली पाहिजे?

१०५. एक घड्याळ दुपारचे १२ वाजतांना ६$\frac{७}{११}$ मिनिटें मागें होतें. हें २०॥ तासांत १२ मिनिटें मागें पडतें, तर दुपारानंतर ह्याचे कांटे चौथ्यानदां एकत्र होतील तेव्हां खरा काळ काय असेल ?

तोंडचे हिशोब.

१३६. व्यवहारांतील साधारण हिशोब लवकर तोंडच्या तोंडीं करतां यावेत ह्मणून कांहीं चाली बसविल्या आहेत त्यांस **तोंडी** ह्मणतात. त्या सर्व त्रैराशिकाच्या साह्यानें बसविल्या आहेत हें

समजणें जरूर आहे; ह्मणून प्रत्येक चाल मुलांस सांगून ती कशी बसली हें शिक्षकानें त्यांस समजावून द्यावें. ह्मणजे तेवढीं त्रैराशिकाचीं उदाहरणें होऊन मुलें चाली विसरणार नाहींत.

भाग पाडण्यास सोपें पडावें ह्मणून कांहीं कल्पित मानें धरून कोष्टकें बनविलीं आहेत तीं लक्षांत ठेविलीं पाहिजेत.

(१) १२ कच्चे*= १ रु.

∴ १ कच्चा = $\frac{१६}{१२}$ आणे = $\frac{१६ \times १२}{१२}$ पै = १६ पै.

(२) ३० दाम = १ आणा.

∴ २॥ दाम = $\frac{३०}{१२}$ दा. = $\frac{१ \text{ आणा}}{१२}$ = $\frac{१२\text{पै}}{१२}$ = १ पै.

(३) १०० रेस = १ पावला = ४ आणे.

नमुन्याकरितां दोन चाली पुढें बसविल्या आहेत त्या पहाव्या.

उ० १ लें. तोळ्यावरून गुंजेस.

१ रुपया तोळा असें धरलें तर १ गुंजेस काय पडेल ?

१ तोळा = १२ मासे = १२ × ८ गुंजा. ∴ त्रैराशिकानें,

१२ × ८गुंजांस : १ गुंज :: १ रु. : उ.

∴ उ० = $\frac{१}{१२ \times ८}$ रु. = $\frac{१ \times १६^{२} \times १२}{१२ \times ८}$ पै = २पै उ. तेव्हां १ रु. तोळा असल्यास २ पै गुंजेस पडतात.

∴ **रीति–जितके रुपये तोळ्यास असतील त्याच्या दुप्पट पै गुंजेस झाल्या.**

उ० २ रें. दरमहा दर शेंकड्यावरून एका रुपयास व्याज.

१०० रुपयांस दरमहा दर रुपये व्याज तर १ रुपयास किती ? त्रैराशिकानें,

१०० रु : १ रु. :: द. व्या : उ. व्या.

∴ उ. व्या = $\frac{१ \times द}{१००}$ रुपये.

---

* 'कचे' हा शब्द फार व्यापक अर्थाचा आहे. कधीं १२ कच्च्यांचा तर कधीं ४० कच्च्यांचा रुपया धरावा लागतो. भागाच्या धोरणानें ही संख्या ठरवावी.

रुपयांचे आणे पै केल्यानें त्यांस १०० नीं सारखा भाग तुटत नाहीं ह्मणून तें कोष्टक न घेतां १०० रेस = १ पावला = ४ आणे हें कोष्टक घेतलें.

$\therefore$ उ. व्या. $= \frac{\text{१}\times\text{द}}{\text{१००}}$ रु. $= \frac{\text{१}\times\text{४}\times\text{द}}{\text{१००}}$ पावले.

$= \frac{\text{१}\times\text{४}\times\text{१००}\times\text{द}}{\text{१००}}$ रेस = ४ द. रेस.

$\therefore$ रीति–जितके रुपये शेंकडा व्याज असेल त्याचे चौपट रेस दरमहा दर रुपयास व्याज पडेल.

तोडी अथवा तोंडच्या हिशोबांच्या रीति.

सोनें, रुपें, इ० मौल्यवान पदार्थांविषयीं.

तोळ्यावरून माशासः—जितके रुपये तोळ्यास असतील तितके कच्चे एका माशास झाले. १२ कच्च्यांचा एक रुपया, दर कच्च्यास १६ पै.

तोळ्यावरून गुंजेसः—जितके रुपये तोळ्यास असतील त्यांच्या दुप्पट पै गुंजेस झाल्या.

माशावरून गुंजेसः—जितके रुपये माशास असतील त्यांच्या दुप्पट आणे गुंजेस झाले.

माशावरून तोळ्यासः–जितके आणे माशास असतील, त्यांच्या पाऊणपट रुपये तोळ्यास झाले.

गुंजेवरून तोळ्यासः—जितके आणे गुंजेस असतील, त्यांच्या सहापट रुपये तोळ्यास झाले.

कालमान.

वर्षावरून दिवसासः—वर्षास जितके रुपये असतील, ते ज्यांची पाऊणपट असेल, तितके दाम एक दिवसास झाले. ३० दामांचा एक आणा.

महिन्यावरून दिवसासः—जितके रुपये महिन्यास असतील, त्यांचे निम्मे आणे आणि पुरे दाम एका दिवसास झाले.

दिवसावरून महिन्यासः—जे आणे दिवसास असतील त्यांच्या दुप्पट रुपयांत दुप्पट आणे कमी.

दिवसावरून वर्षासः– जितके दाम दिवसास असतील त्यांच्या पाऊणपट रुपये वर्षास झाले.

कैली धारुळें माप.

खंडीवरून मणासः—जितके रुपये खंडीस असतील, त्यांची दुप्पट करून वर शून्य द्यावें तितके रेस मणास झाले.

खंडीवरून पायलीसः—जितके रुपये खंडीस असतील त्यांच्या दुप्पट दाम पायलीस झाले.

खंडीवरून शेरासः—जितके रुपये खंडीस असतील, त्यांच्या निम्मे दाम शेरास झाले.

खंडीवरून पल्लयासः—जितके रुपये खंडीस असतील, तितके चव्वल पल्लयास झाले.

पल्लयावरून पायलीसः—दराचे निम्मे आणे आणि पुरे दाम पायलीस झाले.

पल्लयावरून शेरासः—दराची चौपट करावी, तितके दाम शेरास झाले.

शेरावरून पल्लयासः—शेरास जितक्या पै असतील त्यांची निम्पट करून सवाई करावी, तितके रुपये पल्लयास झाले.

पायलीवरून पल्लयासः—पायलीस जे आणे असतील, त्यांच्या दुप्पट रुपयांत त्यांचे दुप्पट आणे कमी.

पायलीवरून खंडीसः—दराच्या पै करून सवाई करावी, तितके रुपये खंडीस झाले.

शेरावरून खंडीसः—जितके दाम शेरास असतील, त्यांच्या दुप्पट रुपये खंडीस झाले.

मणावरून शेरासः—जितके रुपये मणास असतील, त्यांच्या चौपट पै शेरास झाल्या.

मुड्यावरून पायलीसः—जितके रुपये मुड्यास असतील, तितके रेस पायलीस झाले.

वजनी.

मणावरून शेरासः—जितके आणे मणास असतील, त्यांचे पाऊणपट दाम शेरास झाले.

शेरावरून तोळ्यासः--जितके रुपये शेरास असतील, त्यांच्या पांचपट रेस तोळ्यास झाले.

तोळ्यावरून शेरासः--जे आणे तोळ्यास असतील, त्यांच्या पांचपट रुपये शेरास झाले.

मणावरून पासरीसः--जितके रुपये मणास असतील, तितके चव्वल पासरीस झाले.

दरमहा दर शेंकडा व्याज अमुक रुपये, तेव्हां अमुक रुपयांचें व्याज किती? जितके रुपये शेंकडा व्याज असेल, त्यांची चौपट करावी, तितके रेस दरमहा दर रुपयास व्याज झालें.

शेंकडा बट्टा अमुक, तेव्हां अमुक रुपयांचा बट्टा किती? शेंकडा जितके रुपये बट्टा असेल, त्यांची चौपट करावी, तितके रेस दर रुपयास बट्टा झाला.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ळ.

१उ० १७ रुपये तोळा, एक माशाचें काय झालें?
१९ रुपये तोळा, दीड माशाचें काय झालें?
१५॥ रुपये तोळा, तेव्हां सव्वादोन माशांचें काय द्यावें?

२उ० २१ रु. तोळा, तेव्हां एक गुंजेचें काय?
१९। रु. तोळा, तेव्हां अडीच गुंजांचें काय द्यावें?
दीड तोळा एक गुंज सोन्याचें काय द्यावें? एक तोळ्यास २१ रुपये पडतात.

३उ० एक माशास १।~ पडतात, तेव्हां गुंजेस काय द्यावें?
एक माशास ८=, तेव्हां दीड तोळ्यास काय द्यावें?
साडे तीन आणे गुंज तेव्हां तोळ्यास काय द्यावें?

४उ० ४५ रु साल, एक दिवसाचें काय झालें?
२० रु. साल, दीड दिवसाचें काय द्यावें?
६७॥ रु. साल, तेव्हां साडेसात दिवसांचें काय द्यावें?

५उ० १० रुपये दरमहा, एक दिवसाचें काय द्यावें?
१२ रुपये दरमहा, २॥ दिवसांचें काय द्यावें?
३॥ रुपये दरमहा, २ महिने आणि ४ दिवस ह्यांचें काय द्यावें?

६उ० ⎧ ०=॥ रोज, एक महिन्याचें काय झालें ?
⎨ ०-॥ रोज, एक वर्षाचें काय झालें ?
⎩ ०= रोज, पाऊण वर्षाचें काय झालें ?

७उ० ⎧ ३७॥ रुपये खंडी, एक मणास काय पडेल ?
⎨ ११॥ रुपये खंडी, एक पायलीचें काय द्यावें ?
⎩ ४५ रुपये खंडी, तेव्हां एकमण दीड पायलीचें काय ?

८उ० ⎧ २० रुपये खंडी, दीड शेरास काय द्यावें ?
⎨ २८ रुपये खंडी, सव्वा पल्ल्यास काय द्यावें ?
⎩ १० रुपये पल्ला, दीड पायलीस काय द्यावें ?

९उ० ⎧ १२ रुपये पल्ला, अडीच शेरांचें काय झालें ?
⎨ शेरास दीड आणा, दीड पल्ल्याचें काय झालें ?
⎩ सव्वा दोन आणे पायली, एक पल्ल्याचें काय झालें?

१०उ० ⎧ एक पायलीस ०=, अडीच खंडींचें काय झालें ?
⎨ एका खंडीचें काय झालें ? एका शेरास एक आणा पडतो.
⎩ दीड रुपया मण, अडीच शेरांचें काय ?

११उ० ⎧ वरचेंच उदाहरण वजनी असेल तर उत्तर काय येईल?
⎨ २ रुपये शेर, ५ तोळ्यांचें काय ?
⎩ तोळ्यास ।-, तेव्हां एक शेर तीन तोळ्यांस काय द्यावें?

१२उ० ⎧ दरमहा दरशेंकडा १॥ रुपयाप्रमाणें २८ रुपयांचें दीड महिन्याचें व्याज किती झालें ?
⎨ शेंकडा वट्टा ३॥ रुपये, ५१ रुपयांचा वट्टा किती होईल ?
⎨ शेंकडा दलाली बारा आणे, ८० रुपयांची दलाली किती द्यावी ?
⎩ २। रुपये शेंकडाप्रमाणें ५८॥ रुपयांची हुंडणावळ किती झाली ?

संयुक्त प्रमाण अथवा बहुराशिक.

१३७. ज्या प्रमाणांत अनेक युग्मांचा संबंध येतो, किंवा ज्यांत उत्तर शोधण्याला तिहींपेक्षां अधिक राशि दिलेले असतात, त्याला **संयुक्त प्रमाण अथवा बहुराशिक** ह्मणतात.

ह्यांत अनेक त्रैराशिकें एकमेकांशीं संबंध असणारीं अशीं येतात, ह्मणून बहुराशिकास त्रैराशिक परंपरा असेंही ह्मणतां येतें.

उदाहरण–३० बिघे शेत दररोज ६ तास काम करून १० दिवसांत कापून टाकण्याला ९ मनुष्यें लागतात, तर ४० बिघे शेत दररोज ८ तास काम करून १५ दिवसांत कापण्यास किती मनुष्यें लागतील ?

ह्या उदाहरणांत ४० बिघे शेत कापण्यास किती मनुष्यें लागतील हा मूळ प्रश्न आहे. वरती निरनिराळ्या अटी सांगितल्या आहेत त्यांच्या अनुरोधानें ही मनुष्यांची संख्या काढावयाची आहे. तेव्हां अर्थात जितक्या अटी दिल्या असतील तितकीं निरनिराळीं त्रैराशिकें विचारांत घ्यावीं लागतील हें उघड आहे.

(१) जास्ती बिघे कापण्यास जास्ती मनुष्यें लागतील.

∴ सम ३० बि. : ४० बि. = ९ म. : १२ म.

(२) मनुष्यांनीं जास्ती तास काम केलें तर कमी दिवस लागतील.

∴ व्यस्त ~~६~~८ ता. : ~~८~~६ ता. : : १२ म. : ९ म.

(३) काम लवकर झालें नाहीं तरी चालेल, दिवस अधिक लागले तरी चिंता नाहीं असें असेल तर कमी मनुष्यें पुरतील.

∴ व्यस्त ~~१०~~१५ दि. : ~~१५~~१० दि. : : ९ म. : ६ म.

तेव्हां ६ मनुष्यें हें उत्तर आलें. व प्रत्येक अटीकरितां १ अशीं ३ त्रैराशिकें वरतीं करावीं लागलीं ह्मणून बहुराशिक हें त्रैराशिकांची परंपरा आहे असें ह्मटलें आहे.

आतां जीं वरतीं तीन त्रैराशिकें करून दाखविलीं त्यांत प्रमाणें कसकशीं आलीं त्यांचा विचार करूं. वरील तीन त्रैराशिकें एकाखालीं एक मांडलीं तर असें होतें.

३० बि. : ४० बि. : : ९ म. : १२ म.
८ ता. : ६ ता. : : १२ म. : ९ म.
१५ दि. : १० दि. : : ९ म. : ६ म.

येथें ९म. : १२ म. :: १२ म. : ९ म. :: म. ९ म. : ६ म. असे क्रमिक राशि आले आहेत, ह्मणून नियम ५ वा क. १२३ प्रमाणें ह्यांचें गुणोत्तर ९ : ६ बरोबर असतें. ह्मणून हीं त्रैराशिकें निरनिराळीं न करितां ३० × ८ × १५ : ४० × ६ × १० :: ९ : ६ असें एकदम मांडलें तरी चालतें. यावरून बहुराशिकाची रीति अशी निघते कीं :—

१३८. बहुराशिकाची रीति–उत्तराच्या जातीचें पद ३ ऱ्या स्थलीं मांडावें. आणि उदाहरणांत दिलेलीं निरनिराळीं पदें त्रैराशिकाप्रमाणें ह्या ३ ऱ्या पदाशीं ताडून समव्यस्त पाहून १ ल्या अगर २ ऱ्या स्थलीं ओळीनें एकाखालीं एक मांडावी. मग २ ऱ्या रांगेंतील सर्व पदांचा व ३ ऱ्या पदाचा क्रमिक गुणाकार करून त्यास १ ल्या रांगेंतील पदांच्या क्रमिक गुणाकारानें भागावें ह्मणजे उत्तर येईल.

उपपत्ति—जितक्या ओळी होतात तितकीं त्रैराशिकें असतात, ह्या त्रैराशिकांचीं तिसरीं व चवथीं पदें वरतीं दाखविल्याप्रमाणें क्रमिक राशि असतात, ह्मणून प्रत्येक त्रैराशिक न सोडवितां सर्व त्रैराशिकांत तिसरें पद जें तिसऱ्या स्थलीं मांडलें असतें तेंच आहे असें ह्मटलें तरी चालतें. व ह्या क्रमिक राशीचें गुणित गुणोत्तर आद्यंत राशींच्या गुणोत्तराबरोबर असतें ह्मणून प्रमाण नियम १ प्रमाणें तिसरें पद व २ ऱ्या ओळींतील सर्व पदें यांचा क्रमिक गुणाकार, उत्तर व १ ल्या ओळींतील सर्व यांच्या क्रमिक गुणाकाराबरोबर असतो. ह्मणून ३ रें पद व २ ऱ्या ओळींतील पदें ह्यांच्या क्रमिक गुणाकाराला १ ल्या ओळींतील पदांच्या क्रमिक गुणाकारानें भागिल्यास उत्तर निघतें.

सूचना.— १ ल्या ओळींतील पदें व २ ऱ्या ओळींतील पदें आणि १ ल्या ओळींतील ३ ऱ्या ओळींतील पदें ह्यांना संक्षेप जातील ते द्यावे, किंवा गुणकभाजक जोडल्यावर अंशछेदांना संक्षेप जातील ते द्यावे, ह्मणजे कृत्य सोपें होईल.

आपण वरचेंच उदाहरण बहुराशिकानें करूं. या उदाहरणांत

शेत अधिक विस्ताराचें असून त्यास कापण्यास काळही अधिक दिला आहे. तेव्हां मनुष्यांचे संख्येचा संबंध, शेताचा विस्तार आणि कापण्यास दिलेला काळ ह्या दोन गोष्टींवर आला. विस्तार वाढला तर मनुष्यें वाढतील. हें सम प्रमाण आहे. परंतु काळ अधिक दिल्यानें काम संपविण्यास मनुष्यें कमी लागतील. हें व्यस्त प्रमाण झालें. त्याचप्रमाणें प्रत्येक दिवशीं कांहीं तास काम होणार, ह्मणून जास्ती तास काम केलें तर कमी दिवस लागतील व कमी तास काम केलें तर जास्ती दिवस लागतील, ह्मणून हेंही प्रमाण व्यस्त आहे. मनुष्यांचा बदल बिघ्यांच्या सम प्रमाणांत व दिवसांच्या व तासांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो, ह्मणून बिघ्यांचें प्रमाण सम मांडून दिवसांचें व तासांचें प्रमाण व्यस्त मांडलें. जसें.—

सं. प्र. ३० बि. : ४० बि.
व्य. प्र. ८ ता. : ६ ता.
व्य. प्र. १५ दि. : १० दि.
} : : ९ म. : उ. म.

$$\therefore \quad \text{उ. म.} = \frac{४० \times ६ \times १० \times ९}{३० \times ८ \times १५} \text{म.} = ६ \text{ म. हें उत्तर.}$$

उ० २ रें. एक ६०० पृष्ठांचें पुस्तक १० दिवसांत लिहिण्यास ६ लेखक लागतात; तर १२०० पृष्ठांचें पुस्तक ४ लेखक किती दिवसांत लिहितील ?

रीतीप्रमाणें मूळराशि १ ले ओळींत व फलराशि ३ रे ओळींत मांडून, इच्छाराशि २ रे ओळींत व इच्छाफलाचें दर्शक उ अक्षर ४ थे स्थळीं मांडलें.

स. प्र. ६०० प : १२०० प.
व्य. प्र. ६ ले : ४ ले.
} : : १० दि. : इष्ट दि.

पुस्तकाचीं पानें वाढलीं तेव्हां दिवस अधिक लागतील हें सम प्रमाण. लेखक कमी केल्यानें दिवस आधिक लागतील हें व्यस्त प्रमाण. तेव्हां समव्यस्तांचे अनुक्रमानें पदें बदललीं.

$$\therefore \text{ उ. दिवस} = \frac{१२०० \times ६ \times १०}{६०० \times ४} \text{दि.} = ३० \text{ दि. हें उत्तर.}$$

उ० ३ रें. ११ पौं. १७ शि. ६ पे. भाड्यानें २५ मैलांवर

३ टन १६ हं. वे. नेतात, तर ५ पौं. १९ शि. २ पे. भाड्यानें ५२ मैलांवर किती वजन नेतील ?

११ पौं. १७ शि. ६ पे. = २८५० पे.

५ पौं. १९ शि. २ पे. = १४३० पे.

रीतीप्रमाणें फलाचे संबंधी १ ल्या ओळींत व इच्छाफलाचे संबंधी २ ऱ्या ओळींत मांडिले. जसे.—

२८५० पे. : १४३० पे. ⎫
२५२ मै. : ५२२५ मै. ⎭ : : ७६ हं. वे. : उ.

येथें भाडें वाढल्यानें ओझें वाढतें व मैल वाढल्यानें ओझें कमी होतें. ह्मणजे हंड्रेडवेटांचा बदल पेन्सांच्या सम प्रमाणांत व मैलांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो, ह्मणून पदें बदललीं.

∴ उ. = $\frac{१४३० \times २५ \times ७६}{२८५० \times ५२}$ हं. वे = १८$\frac{१}{३}$ हं. वे.

उ. ४ थें. १६ तोफांच्या ४ पाळ्या ७ मिनिटांत झाल्यानें २७० मनुष्यें १॥ तासांत मरतात. ह्यावरून किती तोफांच्या ८ पाळ्या ९ मिनिटांत झाल्यानें ४२० मनुष्यें ४० मिनिटांत मरतील?

येथें १६ तोफा ह्या फलाचे संबंधी मानराशि १ ल्या स्थलीं, इच्छाफलाचे संबंधी इच्छाराशि २ ऱ्या स्थलीं, इ. मांडिले तर,

व्य.	४८ पा. : ८४ पा.	⎫	
स.	७ मि. : ९ मि.	⎬	= १६ तो. : उत्तर तोफा.
स.	२७० म. : ४२० म.	⎪	
व्य.	९०४० मि. : ४०९० मि.	⎭	

येथें इतर संबंध कायम राहून तोफांच्या सरबत्तीच्या पाळ्या २ पट वाढल्या तर तोफांची संख्या $\frac{१}{२}$ पट होते. हें प्रमाण व्यस्त आहे, ह्मणून पदें बदललीं.

प्रत्येक पाळीमधला काळ २ पट झाला तर तोफांची संख्या २ पट होते हें प्रमाण सम आहे. ह्मणून पदें तशींच ठेविलीं.

मरणारीं मनुष्यें दुप्पट झालीं तर तोफांची संख्या २ पट होते. हें प्रमाण सम आहे. ह्मणून पदें तशींच ठेविलीं.

सरबत्तीचा काळ २ पट झाला तर तोफा $\frac{1}{2}$ पट होतात. हें प्रमाण व्यस्त आहे. म्हणून पदें बदललीं.

$$\therefore \text{उ} = \frac{\overset{१}{\cancel{४}} \times \overset{१}{\cancel{४}} \times \overset{१}{\cancel{४२००}} \times \overset{१८}{\cancel{४००}} \times \overset{२}{\cancel{१६}}}{\underset{१}{\cancel{८}} \times \underset{१}{\cancel{७}} \times \underset{१}{\cancel{२७००}} \times \underset{१}{\cancel{४००}}} \text{तो.} = ३६\text{तो. हें उत्तर.}$$

उ. ५ वें. ग्यारिसनच्या (बंदोबस्ताच्या) ४५०० मनुष्यांना दररोज दरमाणशीं १३ औंस प्रमाणें १५ आठवड्यांना पुरेसें अन्न आहे. हें अन्न दररोज दरमाणसास १० औंस प्रमाणें देऊन २७ आठवडे पुरविणें आहे, तर यांतले किती लोक दुसरीकडे पाठवावे ?

येथें ४५०० म ह्या फलाचे संबंधी १ ल्या स्थलीं व इच्छाफलाचे संबंधी ४ र्या स्थलीं मांडले. तर,

व्य. ~~१३~~ १० औं. : ~~१०~~ १३ औं. }
व्य. ~~१५~~ २७ आ. : ~~२७~~ १५ आ. } = ४५०० म. : ज्ञेय म.

जर माणशीं औंस २ रा हिस्सा दिले तर तें अन्न २ पट मनुष्यांस पुरतें हें प्रमाण व्यस्त आहे. ह्मणून पदें उलटलीं.

जर आठवडे २ पट केले तर माणसें २ हिस्सा होतात. हेंही प्रमाण व्यस्त आहे. ह्मणून पदें उलटून लिहिलीं.--

$$\text{ज्ञ} = \frac{\overset{२५०}{\cancel{४५००}}\text{म} \times १३ \times \overset{१}{\cancel{१५}}}{\underset{१}{\cancel{१०}} \times \underset{१}{\cancel{२७}}} = ३२५० \text{ म.}$$

ह्यावरून ४५०० म. - ३२५० म. = १२५० म. दुसरीकडे पाठवावीं हें उत्तर.

कांहीं बहुराशिकें प्रश्नांतील संबंध विचारांत घेऊन तयार करावीं लागतात.

उ. ६ वें. जर १५ घोडे व ९५ मेंढ्या १२ दिवस पोसण्याला १५० रुपये खर्च येतो, तर ३ घोडे व २५ मेंढ्या ३० दिवस पोसण्याला काय खर्च येईल ? १ दिवसाचा ६ घोड्यांचा व ५८ मेंढ्यांचा खर्च हे समान आहेत असें समजा.

जर	६ घोड्यांचा खर्च	= ५८ मेंढ्यांचा खर्च,	
तर	१ घोड्याचा ,,	= $\frac{\text{५८}}{\text{६}}$ मेंढ्यांचा ,,	
व	१५ घोड्यांचा ,,	= १४५ मेंढ्यांचा ,,	
आणि	३ घोड्यांचा ,,	= २९ मेंढ्याचा ,,	

येथें खर्चाचा बदल मेंढ्यांच्या सम प्रमाणांत व दिवसांच्याही सम प्रमाणांत होतो. ह्मणून उदाहरण असें होतें कीः—

$$\left.\begin{matrix}(\text{१४५} + \text{९५})\text{ मैं.} : (\text{२९} + \text{२५})\text{ मैं.}\\ \text{१२ दि.} : \text{३० दि.}\end{matrix}\right\} = \text{१५० रु.} : \text{क्ष.}$$

$$\text{क्ष} = \frac{\text{१५० रु.} \times \text{५४} \times \text{३०}}{\text{२४०} \times \text{१२}} = \frac{\text{६७५}}{\text{८}}\text{ रु.}$$

= ८४ रु. ६ आ. हें उत्तर.

उ. ७ वें. जर ६० मनुष्यें रोज ८ तास खपून ६ दिवसांमध्यें १२० फूट लांब ३६ फूट रुंद व २५ फूट खोल खाडा खणतात, तर किती दिवसांमध्यें १८ मनुष्यें रोज ९ तास खपून २२५००० घनयार्ड जमीन खोदून रस्ता सपाट करितील ?

$$\text{खाड्याचे घनयार्ड} = \frac{\text{१२० या.}}{\text{३}} \times \frac{\text{३६ या.}}{\text{३}} \times \frac{\text{२५ या.}}{\text{३}}$$

$$= \frac{\text{१२०} \times \text{३६} \times \text{२५}}{\text{२७}}\text{ घनयार्ड.}$$

येथें तिसरें पद ६ दिवस ह्याचे संबंधी १ ल्या स्थलीं व इच्छाफलाचे संबंधी २ ऱ्या स्थलीं मांडिलें.

$$\left.\begin{matrix}\text{व्य.} & \text{६० म.} & : & \text{१८ म.}\\ \text{व्य.} & \text{८ ता.} & : & \text{९ ता.}\\ \text{स.} & \frac{\text{१२०} \times \text{३६} \times \text{२५}}{\text{२७}}\text{ घ.या.} & : & \text{२२५००० घ.या.}\end{matrix}\right\} = \text{६ दि.} : \text{ज्ञ.}$$

नेमलेला खड्डा खोदण्यास मनुष्यें कमी लाविलीं तर कामाचे दिवस वाढतात हें व्यस्त प्रमाण. हें लक्षांत ठेवावें.

नेमलेल्या खड्ड्यावर मनुष्यें अधिक तास लाविलीं तर तो खड्डा कमी दिवसांत पुरा होतो. हें व्यस्त प्रमाण. हें लक्षांत घ्यावें.

नेमलेल्या मनुष्यांना अधिक घनयार्ड खोदावें लागलें तर

दिवस वाढतात. हें सम प्रमाण ह्मणून, समव्यस्त प्रमाणें पदें घेऊन,

$$\text{इ} = \frac{६\ \text{दि} \times ६० \times ८ \times २२५००० \times २७}{१८ \times ४ \times १२० \times ३६ \times २५} = \frac{६०००}{६}\ \text{दि.}$$

= १००० दि. हें उत्तर.

उ. ८ वें. ग्यासाचे (धुराचे) ४ दिवे ५ रुपयांच्या खर्चांत ३० दिवसपावेतों रोज ५ तास जाळतां येतात, तर १६ रु. खर्चांत ८० दिवे ४ दिवसपावेतों रोज किती तास जाळतां येतील ?

येथें तिसरें पद ५ तास आहेत, ह्यांचे संबंधी राशि १ ले स्थलीं व इच्छाफलाचे संबंधी राशि २ रे स्थलीं असे रीतीप्रमाणें मांडले,

स.	५ रु ख.	:	१६ रु. ख.	
व्य.	४ दिवे	:	८० दिवे	= ५ तास : उ.
व्य.	३० दिवस	:	४ दिवस	

येथें नेमलेल्या दिव्यांचे रुपये वाढविले तर तास वाढतात. पण नेमलेल्या खर्चांत दिवे वाढविले तर तास कमी होतात. व दिवस वाढविले तरी तास कमी होतात. सारांश, तासांचा बदल रुपयांच्या सम प्रमाणांत, दिव्यांच्या व्यस्त प्रमाणांत व दिवसांच्या व्यस्त प्रमाणांत होतो. ह्मणून समव्यस्ताप्रमाणें पदें घेऊन,

$$\text{उ.} = \frac{५\ \text{तास} \times १६ \times ४ \times ३०}{५ \times ८० \times ४} = ६\ \text{तास हें उत्तर.}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. क्ष.

१. १५ फरे धान्य ९ मनुष्यांस ८ महिने पुरतें, तर २० फरे धान्य ६ मनुष्यांस किती दिवस पुरेल ?

२. ६६ रुपये १० आणे दिल्यानें १८ दिवसपर्यंत १६ मनुष्यें काम करतात, तर १९९ रु. १४ आणे दिल्यानें २७ दिवसपर्यंत किती मनुष्यें काम करतील ?

३. २० मनुष्यें १२ दिवसांत जें काम करतात, त्याचें तिप्पट काम पूर्वीच्या काळाच्या $\frac{1}{2}$ काळांत करावयाचें आहे, तर किती मनुष्यें लावावीं ?

४. ७ घोड्यांस २० दिवसांस १४० रुपये लागतात, तर २८० रुपये ७ दिवसपर्यंत किती घोड्यांस पुरतील ?

५. १४ घोड्यांस १६ दिवसांस गवताचे भारे ५६ लागतात, तर १२० भारे २४ दिवसपर्यंत किती घोड्यांस पुरतील ?

६. एक व्यापारी ३००० रुपये भांडवल घेऊन ३ महिन्यांत ५० रुपये नफा मिळवितो, तर त्याला ४५०० रुपये भांडवलावर १५० रुपये नफा मिळविण्यास किती दिवस लागतील ?

७. ८ मजूर ४ महिन्यांत २४ रुपये मिळवितात. तर २४ मोहोरा ६ महिन्यांत किती मजूर मिळवितील ?

८. १६ घोड्यांस ८०० पेंढ्या गवत ५ दिवस पुरतें. तर ४ घोड्यांस तेंच गवत किती दिवस जाईल ?

९. एक इसम ३४५$\frac{5}{6}$ चौ. यार्ड शेत १ तासांत बेणतो. तर ६ एकर क्षेत्र बेणण्याला ६ इसमांस किती दिवस लागतील ? दररोज ४ तास काम करावयाचें.

१०. एक दगड ५ फूट लांब, ३ फूट ९ इंच रुंद, व २ फूट ६ इंच जाड २॥ खंडी वजन भरतो तर तसलाच दगड १० फूट लांब, ५ फूट ९ इंच रुंद व ३ फूट जाड किती वजन भरेल?

११. कागदाच्या ६६ रिमांत ४४ पानांचे बुकाच्या ३००० प्रति छापल्या जातात, तर आम्हांस ५० पानांचे बुकाच्या ५००० प्रति छापावयाच्या आहेत त्यांस रिमें किती लागतील ? एका रिमांत ४८० पानें असतात.

१२. १२ मनुष्यें ४ महिन्यांत १६० रुपये खर्च करतात, तर रु. ८० आठ महिनेपर्यंत किती मनुष्यांस पुरतील ?

१३. ८ मनुष्यें ५ दिवस काम करून ९० रुपये मिळवितात, तर ह्या मानानें ३२ मनुष्यांनीं ३४ दिवस काम केलें असतां त्यांस काय मिळेल ?

१४. १०० रुपयांत ५ मनुष्यांचा खर्च २१ आठवडे आणि ५ दिवस पर्यंत चालतो, तर १२ मनुष्यांस १५० रुपये किती दिवस पुरतील ?

१५. ७ मनुष्यें ९ पौं. १० शि. ६ पे. १०॥ दिवसांत मिळवितात, तर २८ मनुष्यें ३१॥ दिवसांत किती पौंड मिळवितील ?

१६. २४ मनुष्यांनीं १६ दिवस काम केलें असतां त्यांची मजुरी ७६।।। रुपये होते. आतां मजुरीचा दर निम्में केला तर २४ दिवसांत १५३॥ रुपये मजुरी होण्यास किती मनुष्यें कामावर लावावीं ?

१७. दोन घनफूट लोखंड १५ घनफूट पाण्याबरोबर जड असतें, आणि १ घनफूट पाण्याचें वजन १००० औंस असतें, तर एका लोखंडी २ घनयार्ड पाट्याचें वजन किती होईल ?

१८. ५ तट्टांचें बळ ३ घोड्यांबरोबर आहे. तर जें वजन १२ घोडे केवळ हलवूं शकतात त्यास हलविण्यास किती तट्टें लावावीं ?

१९. दररोज ९ तासप्रमाणें काम करून ३४ मनुष्यें कांहीं एक काम ९५ दिवसांत करतात. तर ५७ माणसांस तेंच काम ५१ दिवसांत संपविणें असल्यास दररोज किती तास खपावें लागेल ?

२०. एक खडा विहिरीचे तोंडापासून सोडला तो ३ सेकंडांनीं पाण्याचे सपाटीस लागला, तर पाणी काढण्यास किती फूट लांब दोर पाहिजे ?

२१. २१ मनुष्यें ७२ बिघे जमिनींतील गवत ८ दिवसांत कापतात, ह्या मानानें ५०४ बिघे जमिनींतील गवत ६ दिवसांत कापावयाचें आहे, तर किती मनुष्यें लावावीं ?

२२. ३ मनुष्यांचे कुटुंबास १२० रुपये ८ महिनेपर्यंत पुरतात, तर ह्या मानानें २४ मनुष्यांस १६ महिन्यांस किती रुपये लागतील ?

२३. बैलांच्या १२ जोड्यांनीं ५ दिवसांत ११ एकर शेत नांगरलें, तर ३३ एकर शेत १८ दिवसांत नांगरावयाचें आहे त्यास किती जोड्या लावाव्या ?

२४. १० रुपये मण साखर होती, तेव्हां ३६ तोळे वजनाच्या गांठीस दोन आणे पडत होते. आतां २४ तोळे वजनाच्या गांठीस दीड आणा पडतो, तर साखरेचा भाव काय असावा ?

२५. दररोज ८ तासप्रमाणें चालून एक गृहस्थ ३ दिवसांत ६० कोस जातो, तर तोच गृहस्थ दररोज ६ तास चालून ५४० कोस लांब किती दिवसांत जाईल ?

२६. ३० खंडी गल्ला १५ कोस न्यावयास भाडें ५॥ - लागतें, तर २९ रुपयांत ८८ खंडी गल्ला किती लांब नेला जाईल ?

२७. एक मनुष्य १६० मैलांची प्रदक्षिणा, रोज ११ तास चालून ८ दिवसांत संपवितो; तो जर १५ तास रोज चालू लागला, तर १००० मैलांची प्रदक्षिणा संपवावयास त्यास किती दिवस लागतील ?

२८. एक खंडी हरभरे ९ घोड्यांस १५ दिवस पुरतात, तर ४० घोड्यांस लीप* वर्षांतील जानेवारी व फेब्रुवारी ह्या दोन महिन्यांत किती हरभरे लागतील ?

२९. दररोज ८ तास काम करून १८ मनुष्यांनीं २५ दिवसांत ३० यार्ड लांब खाडा खणला, तर रोज ६ तासप्रमाणें काम करून ४० दिवसांत ६० यार्ड लांबीचा खाडा खणावयाला मनुष्यें किती लावावीं ?

३०. ७ गवंड्यांनीं दररोज $९\frac{३}{८}$ तास काम करून $२०\frac{३}{८}$ दिवसांत कांहींएक काम केलें, तर त्याचे $२\frac{३}{४}$ इतकें काम करावयास ३ गवंडी दररोज १२ तास काम करूं लागल्यास त्यांस किती दिवस लागतील ?

३१ प्रत्येक कांब ४ फूट लांब, ३ इंच रुंद, व २ इंच जाड. अशा लोखंडाच्या चार कांबींचें वजन २८८ पौंड भरतें, तर प्रत्येक कांब ६॥ फूट लांब, ४ इंच रुंद आणि तीन इंच जाड अशा १५ कांबींचें वजन किती होईल ?

---

* सन १८८४ सन १८८८ अशा ४ नीं भाग जाणाऱ्या वर्षी फेब्रुवारीचे २९ दिवस धरितात, असल्या २९ शी फेब्रुवारीचे वर्षाला लीप वर्ष हें नांव आहे. अं. भा. १ क. १०० पहा.

३१. दररोज १० तास खपून ३२ मनुष्यें, १२ हात लांब, ८ हात रुंद आणि १० हात खोल असा खाडा ९ दिवसांत खणतात, तर याच्या २॥· पट लांब, १॥।· पट रुंद आणि १।· पट खोल असा खाडा दररोज ८ तास खपून २४ मनुष्यें किती दिवसांत खणतील ?

प्रमाणभाग अथवा सर्कतवांटणी.

१३९. नेमलेल्या संख्यांच्या बेरजेला ती प्रत्येक संख्या अशा प्रमाणांत इष्टसंख्येचे भाग केले, तर ते भाग नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणांत होतात. ह्मणून ह्या भागांना इष्टसंख्येचे **प्रमाणभाग** असें ह्मणतात.

उदाहरणार्थ, नेमलेल्या संख्या २ व ५ आणि इष्टसंख्या २१ घ्या. ह्या नेमलेल्या संख्यांची बेरीज ७ आहे. ह्मणून वरील लक्षणाप्रमाणें.—

$$७ : २ = २१ : २१ \times \frac{२}{७} = ६.$$

व

$$७ : ५ = २१ : २१ \times \frac{५}{७} = १५.$$

असे भाग येतात. वरच्या दोन्ही प्रमाणांत अग्रसर एकच आहेत, ह्मणून त्यांचे उपाग्रसर प्रमाणांत असले पाहिजेत. जसें.–

$$२ : ५ = ६ : १५.$$

हेंच सिद्ध करणें होतें. वरील कृतीनें इष्टसंख्येचे नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणांत भाग होतात. ह्यावरून हे भाग शोधण्याच्या रीति ठरतात त्या अशा. —

१४०. रीति १ ली.—नेमलेल्या संख्यांच्या बेरजेला त्यांतील १ ली संख्या, तसा इष्टसंख्येला तिचा पहिला भाग, अशा प्रमाणांच्या क्रमानें सर्व भाग शोधावे.

ह्या क्रमांत $\frac{\text{नेमलेली संख्या}}{\text{सर्वांची बेरीज}}$ ह्या गुणोत्तरांनीं इष्टसंख्या गुणून इष्टभाग येतात. ह्मणून,

१४१. रीति २ री.—नेमलेल्या संख्यांना त्यांची बेरीज छेद

घ्यावी, आणि त्या सर्व अपूर्णांकांनीं इष्टसंख्या गुणून तिचे सर्व भाग शोधावे.

नेमलेल्या संख्यांची बेरीज व त्या संख्या ह्या त्यांतील एकंच्या ज्या ज्या पटी असतात, त्या त्याच पटी इष्टसंख्या व तिचे भाग हे त्यांतल्या कल्पित एकंच्या असावयाच्या. ह्मणजे,

१ : ७ : २ : ५ = ३ : २१ : ६ : १५

अशीं दोन्हीकडच्या क्रमिक संख्यांचीं गुणोत्तरें समान असावयाचीं. ह्मणून,

१४२. रीति ३ री.—एकंच्या पद्धतीनें नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणाचे इष्टसंख्येचे भाग शोधावे.

उ० १ लें. बंदुकीच्या दारूमध्यें ७६ भाग सोरा, १४ भाग कोळसा, आणि १० भाग गंधक असतो. आपणास १ मण दारू करणें आहे, तर हा प्रत्येक पदार्थ किती किती घालावा? येथें ७६ + १४ + १० = १००, आणि १ मण = ४० शेर, ह्मणून

रीति १ प्र. १०० शेर दा. : ४० शे. दा. = ७६ शे. सो. : ३०$\frac{२}{५}$ शे. सो.

१०० शेर दा. : ४० शे. दा. = १४ शे. को. : ५$\frac{३}{५}$ शे. को.

१०० शेर दा. : ४० शे दा. = १० शे. गं. : ४ शे. गं.

सूचना १ ली.—नेमलेल्या संख्यांत अपूर्णांक आले तर त्यांचे समच्छेद करून त्यांच्या जागीं त्यांच्या प्रमाणाचे पूर्णांक घ्यावे, ह्मणजे कृत्य सोपें होतें.

उ० २ रें. १००० रुपये क, ख, ग, ह्या तीन असामींस असे वांटून दिले कीं, गला जें मिळेल त्यापेक्षां त्याचा तृतीयांश खला अधिक मिळावा, आणि खला जें मिळेल त्यापेक्षां त्याच्या अर्धानें कला अधिक मिळावें, तर प्रत्येकाला काय मिळेल?

ह्या उदाहरणाप्रमाणें गचा भाग १ ह्मटला, तर खचा भाग १$\frac{१}{३}$ = $\frac{४}{३}$ होतो, आणि कचा भाग $\frac{४}{३}$ + $\frac{४}{३}$ चा $\frac{१}{२}$ = २ होतो.

ह्यावरून क, ख, आणि ग; ह्यांचे भाग अनुक्रमें २, $\frac{४}{३}$, व १ असे होतात; ह्मणजे $\frac{६}{३}$, $\frac{४}{३}$, व $\frac{३}{३}$, किंवा ६, ४, व ३ असे

होतात, आणि ह्यांची बेरीज १३ भाग येते. ह्मणून रीति २ प्रमाणें—

$$\text{कचा भाग} = १००० \text{ रु. चे } \frac{६}{१३} = ४६१\frac{७}{१३} \text{ रु.}$$

$$\text{खचा भाग} = १००० \text{ रु. चे } \frac{४}{१३} = ३०७\frac{९}{१३} \text{ रु.}$$

$$\text{व} \quad \text{गचा भाग} = १००० \text{ रु. चे } \frac{३}{१३} = २३०\frac{१०}{१३} \text{ रु.}$$

सूचना २ री.—हे प्रमाणभाग भागीदारांची वांटणी इत्यादि-संबंधानें शोधणें असलें, ह्मणजे ह्या कृत्याला **सर्कतवांटणी** ह्मणतात. भागीदारांच्या रकमा समान कालांपावेतोंच वापरलेल्या असल्या, ह्मणजे तो काळ हिशेबांत घ्यावा लागत नाहीं. परंतु त्या वेगळाल्या काळांपावेतों वापरलेल्या असल्या तर ते काळ हिशेबांत घ्यावे लागतात. ह्मणजे रकमा व वापरणुकीचे काळ हे एकेकाच परिमाणाच्या नांवांत आणून, त्यांचे गुणाकार त्या रकमांच्या जागीं हिशेबांत घ्यावे लागतात. हे भेद दाखविण्यासाठीं पहिल्या प्रकाराला **एकेरी सर्कत**, व दुसऱ्या प्रकाराला **दुहेरी सर्कत** अशीं नांवें देतात.

उ० ३ रें. क, ख, ग, ह्या तिघांनीं सर्कतीनें व्यापार केला. त्यांत कचे ५०० रुपये, बचे ६५० रु, आणि गचे ७०० रु, असे होते. पुढें एका वर्षानें त्या व्यापारांत ५५५ रु. नफा झाला, तो त्या तिघांस कसा वांटून द्यावा ?

हीं भांडवलें समान काळपावेतों असल्यामुळें हीएकेरी सर्कत आहे ह्मणून नफ्याची वांटणी भांडवलाच्याच प्रमाणांत होईल. ह्मणजे ती ५००, ६५०, व ७००, अथवा १०, १३ व १४, ह्या नेमलेल्या संख्यांच्या प्रमाणांत होईल. ह्या संख्यांची बेरीज ३७ आहे, म्हणून एकंच्या पद्धतीनें.

३७ भाग = ५५५ रु.

∴ १ भाग = १५ रु.

∴ कची वांटणी १० भाग = १५० रु.

खची वांटणी १३ भाग = १९५ रु.

व गची वांटणी १४ भाग = २१० रु.

उ. ४ थें. क आणि ख, ह्या दोघांनीं ५००० पौंड भांडवल जमवून सर्कतीनें (भागीनें) व्यापार आरंभिला. त्यांत ३३०० पौंड कचे व बाकी खचे होते. तीन महिने होतांच गचे १५०० पौंड त्या भांडवलांत घालून त्याला त्या सर्कतींत घेतलें, आणि ४ महिने होतांच घचे आणखी १९५० पौंड त्या भांडवलांत घालून त्यालाही त्या सर्कतींत घेतलें. साल अखेरीस ह्या व्यापारांत १७२९ पौंड १३ शि. ९ पे. नफा आकारला. तो त्यांनीं कसकसा वांटून घ्यावा ?

ह्या सर्कतींत वेगळालीं भांडवलें वेगळाल्या काळांपावेतों वापरलीं जातात, ह्मणून ही दुहेरी सर्कत आहे. हींतील ३३०० पौंडांचा १० महिन्यांचा व्यापार = ३३०० × १० पौंडांचा १ महिन्याचा व्यापार आहे, ह्मणून महिने हे रकमांच्या पटी दाखविणारे कल्पून ह्या सर्वांच्या एकेका महिन्यापावेतों केवढाल्या रकमा व्यापारांत होत्या तें काढलें. तर,

कचे ३३०० पौं. × १२ = ३९६०० पौं.
खचे १७०० पौं. × १२ = २०४०० पौं.
गचे १५०० पौं. × ९ = १३५०० पौं.
घचे १९५० पौं. × ८ = १५६०० पौं.
८९१०० पौं.

समान काळपावेतों वापरलेल्या रकमांचा फायदा त्या रकमांच्याच प्रमाणांत असला पाहिजे. ह्मणून,

$$\text{कची वांटणी} = \frac{\text{१७२९ पौं. १३ शि. ९पे.}}{\text{८९१००}} \times \text{३९६००}$$

$$= \text{७६८ पौं. १५ शि.}$$

$$\text{खची वांटणी} = \frac{\text{१७२९ पौं. १३ शि. ९पे.}}{\text{८९१००}} \times \text{२०४००}$$

= इत्यादि.

उ० ५ वें. अनें ८०० रु. घेऊन व्यापारास आरंभ केला. नंतर तीन महिन्यांनीं त्या व्यापारांत १००० रु. देऊन ब मिळा-

ला. पुढें त्या व्यापारांत ६ महिन्यांनीं ३३० रु. नफा झाला. तो उभयतांस कसा वांटून द्यावा ?

ह्या व्यापारांत अचे ८०० रु. ९ महिने होते, बचे १००० रुपये ६ महिने होते.

आतां ८०० रुपयांचा ९ महिन्यांचा नफा = ८०० × ९ रुपयांचा एका महिन्याचा नफा आहे. तसेंच १००० रुपयांचा ६ महिन्यांचा नफा = १००० × ६ रुपयांचा एका महिन्याचा नफा आहे. ह्मणून अ आणि ब ह्यांचे नफे ८०० × ९, आणि १००० × ६ म्हणजे ७२०० आणि ६०००, ह्या प्रमाणांत अथवा ६ आणि ५ ह्या प्रमाणांत येतील.

ह्मणून, $\left\{\begin{array}{l} \text{अची वांटणी } ३३० \times \frac{६}{११} = १८० \text{ रु.} \\ \text{बची वांटणी } ३३० \times \frac{५}{११} = १५० \text{ रु.} \end{array}\right\}$ हें उत्तर.

उ० ६ वें. अनें ५०० रुपये, आणि बनें ३०० रुपये घेऊन दोघांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिल्यावर ९ महिन्यांनीं त्या व्यापारांत क १००० रुपये देऊन मिळाला पुढें ९ महिन्यांनीं पाहतात तों त्या व्यापारांत २००० रुपये नफा झाला. तो तिघांस कसा वांटून द्यावा ?

ह्या प्रमाणांत ५ व्या उदाहरणाप्रमाणें अ, ब, क, ह्यांचे नफे ५०० × १८, ३०० × १८, १०० × ९ ह्या प्रमाणांत अथवा ५, ३, ५ ह्या प्रमाणांत आहेत, म्हणून $\frac{५}{१३}$, $\frac{३}{१३}$, $\frac{५}{१३}$, हे प्रमाण दाखविणारे अपूर्णांक आले. म्हणून,

अचा भाग = २००० रु. × $\frac{५}{१३}$ = ७६९ रु. ३ आ. ८$\frac{४}{१३}$ पै.

बचा भाग = २००० रु. × $\frac{३}{१३}$ = ४६१ रु. ८ आ. ७$\frac{५}{१३}$ पै.

कचा भाग = २००० रु. × $\frac{५}{१३}$ = ७६९ रु. ३ आ. ८$\frac{४}{१३}$ पै.

२००० रु.

उ. ७ वें. क आणि च ह्यांनीं ७ : ११ ह्या प्रमाणाचीं भांडवलें एकत्र करून भागीचा व्यापार चालू केला. तीन महिन्यांचे अखेरीस कनें आपल्या भांडवलाचा $\frac{१}{३}$ त्यांतून काढून घेतला, त्याच्या २ पट पैसा तेथून १ महिन्यानंतर चनें त्या

व्यापारांत नवा घातला. ह्या व्यापारांत ३३७ पौं. ७ शि. ६ पे. नफा झाला आहे. तर तो त्यांनीं कसकसा घ्यावा ?

येथें सप्रमाण संख्यांचीच गरज आहे ह्मणून कचें भांडवल ७ आणि चचें ११ ह्मटलें. ३ महिन्यांनीं कनें ७ चा $\frac{१}{३}$ त्यांतून काढल्यावर त्याचें ४$\frac{२}{३}$ भांडवल राहिलें. ४ महिन्यांनीं चनें $\frac{७}{३}$ चे २ पट = ४$\frac{२}{३}$ भांडवल नवीन घातलें ह्मणून त्याचें भांडवल १५$\frac{२}{३}$ झालें. ह्या कामीं क आणि च ह्यांचीं भांडवलें एकेका महिन्यापावेतोंच केवढालीं वापरलीं गेलीं तें काढलें. तर,

$$\left.\begin{array}{l} ७ \times ३ = २१ \\ ४\frac{२}{३} \times ९ = ४२ \end{array}\right\} = ६३ \text{ हें कचें भांडवल.}$$

$$\left.\begin{array}{l} ११ \times ४ = ४४ \\ १५\frac{२}{३} \times ८ = १२५\frac{१}{३} \end{array}\right\} = \frac{१६९\frac{१}{३}}{२३२\frac{१}{३}} \text{ हें चचें भांडवल.}$$

$$\therefore \text{ कची वांटणी} = \frac{\text{३३७ पौं. ७ शि ६ पे.}}{२३२\frac{१}{३}} \times ६३$$

$$= \frac{३३७\cdot३७५ \times १८९}{६९७} \text{ पौं.}$$

$$= \text{९१ पौं. ९ शि. ८ पे. सुमारें.}$$

$$\text{व चची वांटणी} = \frac{\text{३३७ पौं. ७ शि ६ पे.}}{२३२\frac{१}{३}} \times \frac{५०८}{३}.$$

$$= \text{२४५ पौं. १७ शि. १० पे. सुमारें.}$$

प्रमाण भागावरून नानाप्रकारच्या प्रश्नांचे उलगडे विचाराच्या आधारें करितां येतात.

उ० ८ वें. तीन गांवांतील लोकांनीं त्यांतील वस्तीच्या अनुरोधानें १८२ लोक (किंवा त्यांचे पगार) बंदोबस्ताच्या फौजेंत पाठवावयाचे आहेत. त्यांतील वस्ती, पहिल्यांतील २४५६, दुसऱ्यांतील ७३५, आणि तिसऱ्यांतील ४३६१ अशा आहेत. तर त्यांपासून किती किती लोक घ्यावे तें पोक्त विचारानें सांगा.

येथें एकंदर वस्ती = २४५६ + ७३५ + ४३६१ = ७५५२.

$$\therefore \quad \text{१ ल्या गां. वां} = \frac{\text{२४५६} \times \text{१८२ लो.}}{\text{७५५२}} = \text{५९.१९ लो.}$$

$$\text{२ ऱ्या गां. वां.} = \frac{\text{७३५} \times \text{१८२ लो.}}{\text{७५५२}} = \text{१७.७१ लो.}$$

$$\text{व} \quad \text{३ ऱ्या गां. वां} = \frac{\text{४३६१} \times \text{१८२ लो.}}{\text{७५५२}} = \text{१०५.०९ लो.}$$

आतां वरच्या दशांशस्थलामुळें १ मनुष्याचा तोटा येतो तो कोणत्या गांवापासून घ्यावा हा विचार राहिला. हा मनुष्य १ ल्या, २ ऱ्या, ३ ऱ्या गांवापासून घ्यावयाचा ह्मटला ह्मणजे त्याला वाजवीपेक्षां फाजील देणें पडेल. ह्या फाजील देण्याचीं मानें अनुक्रमानें .८२, .२९, .९१ अशीं येतात. ह्याव रून १ जास्ती मनुष्य २ ऱ्या गांवापासून घेतला पाहिजे असें प्रथमदर्शनीं वाटतें.

परंतु हीं फाजील देणीं त्या त्या गांवांतील लोकांवर वांटलीं जावयाचीं, ह्मणून ह्या प्रत्येक गांवांतील व्यक्तीवर हें फाजील देणें काय बसेल हें पाहिलें, तर तीं व्यक्तीसंबंधीं मानें अनुक्रमें—

$\frac{.\text{८२}}{\text{२४५६}}$; $\frac{.\text{२९}}{\text{७३५}}$; $\frac{.\text{९१}}{\text{४३६१}}$; ह्मणजे .०३३ ; .०३९; .०२०८; अशीं येतात. ह्यावरून ३ ऱ्या गांवापासून १ मनुष्य अधिक घेतला तर त्याबद्दलचें ओझें त्यांतील प्रत्येक व्यक्तीवर अगदीं थोडें पडतें. ह्मणून हा मनुष्य ३ ऱ्या गांवापासून घ्यावा. अर्थात ५९, १७ व १०६ ह्याप्रमाणें लोक घ्यावे.

उ० ९ वें. नियमित काळांत ३ बाप्ये व ४ मुलगे काम करितात तितकेंच २ बाप्ये व १६ मुली करितात, आणि ४ बाप्ये व २ मुलगे काम करितात तितकेंच १२ मुलगे व १२ मुली करितात. एका बाप्यानें १ मुलगा व एक मुलगी ह्यांच्या मदतीनें कांहीं काम करून ४४ शिलिंग बक्षीस मिळविलें आहे, तर त्यांतून केवढालें बक्षीस त्यांना द्यावें ?

३ बा.चें+ ४मु.चें का. = २बा.चें+१६ मुलींचें का.

स.प.३प. १ बा.चें+ ४मु.चें का. = १६ मुलींचें का. ...(१)

व ४ बा.चें+१६मु.चें का. = ६४ मुलींचें का. ...(२)
पुनः ४ बा.चें+ २मु.चें का. = १२ मु.चें+१२मुलींचें का.
∴ ४ बाप्यांचें का. = १० मु.चें+१२ मुलींचें का.

ह्या बरोबरींत १६ मुलांचें काम दोन्ही बाजूंस मिळविलें तर

४ बा.चें+१६मु.चें का. = २६ मु.चें+१२ मुलींचें का.
(२) प्र. ६४ मुलींचें का.=२६ मु.चें+१२मुलींचें का.
५२ ,, ,, = २६ मु.चें काम.
व २ ,, ,, = १ मु.चें काम.
परंतु (१) प्र.१बा.चें+४ मु.चें का.= १६ मुलींचें काम.
∴ १ बाप्याचें काम = ८ मुलींचें काम.

ह्यावरून बाप्या, मुलगा, व मुलगी ह्यांचीं बक्षिसें ८, २ व १ ह्या प्रमाणांत ठरतात.

आतां बाप्याचें + १ मुलाचें + १ मुलीचें काम
= ११ मुलींचें काम = ४४ शि.
∴ १ मुलीचें ,, = ४ शि.
१ मुलाचें किंवा २ मुलींचें ,, = ८ शि.
व १ बाप्याचें किंवा ८ मुलींचें ,, = ३२ शि. हीं उत्तरें.

उ० १० वें. सोनें दर औंसास ३ पौं. १७ शि. १०॥ पे. प्रमाणें आहे. एक सोन्यारुप्याच्या तारांची बुटीदार जाळी, १८ पौंड वजनाची असून, तिची किंमत ६३७ पौं. ७ शि. आहे. परंतु हींत सोन्यारुप्याचें प्रमाण उलट ठेविलें असतें, तर हिची किंमत २५९ पौं. १ शि. झाली असती. ह्यावरून ह्या जाळींत सोनें व रुपें हीं कोणत्या प्रमाणांत आहेत तें सांगा, व रुप्याचा दर काय आहे तें सांगा.

येथें मूळची जाळी व उलट प्रमाणाची जाळी अशा दोन्ही घेतल्या तर त्यांत सोनें व रुपें हीं प्रत्येकीं अठरा अठरा पौंड होऊन त्यांची किंमत ६३७ पौं. ७ शि. + २५९ पौं. १ शि. होईल, म्हणजे ८९६ पौं. ८ शि. होईल. म्हणून,

१८ पौं. सोनें + १८ पौं. रुपें = ८९६ पौं. ८ शि.
परंतु १८ पौं. सोनें = १८ × १२ (३ पौं. १७ शि. १०॥पे.)

= ८४१ पौं. १ शि.

∴ स. प्र. ३ प्र. १८ पौं. रु. = ५५ पौं. ७ शि.

∴ १ पौं. रु. किंवा १२ औं रु. = ३ पौं. १॥ शि.

व १ औं. रु. = ५ शि. १॥ पे. हें. प. उ.

आतां १८ पौं. जाळीची किंमत = ६३७ पौं. ७ शि.

व १८ पौं. जाळी रुप्याची असती तर तिची किंमत = ५५ पौं. ७ शि.

∴ बाकी = ५८२ पौं.

ह्या जाळींत कांहीं सोनें असून त्याची किंमत रुप्याच्या किमतीपेक्षा फाजील आहे. त्या फाजील किमतीची जितकी पट ही बाकी आहे तितकेंच औंस सोनें ह्या जाळींत असलें पाहिजे. म्हणून,

१ औं. सोन्याची किंमत = ३ पौं. १७ शि. १०॥ पे.

व १ औं. रुप्याची किंमत = ५ शि. १॥ पे.

∴ फाजील किंमत = ३ पौं. १२ शि. ९ पे.

∴ $\frac{\text{५८२ पौं.}}{\text{३ पौं. १२ शि. ९ पे.}} = \frac{\text{१३९६८० पे.}}{\text{८७३ पे.}}$ = १६० औं. सो.

= १३ पौं. ४ औं. सोनें.

१८ पौं. जाळी −(१३ पौं. ४ औं.) सो. = ४ पौं. ८ औं. रु.

∴ सो. व. : रु. व = १३ पौं. ४ औं. सो. : ४ पौं. ८ औं. रु.

= १६० औं. सो. : ५६ औं. रु.

= २० : ७ हें इ. प्रमाण.

उ० ११ वें. एका १०० शेर मिश्रणांत ६० शेर दूध व ४० शेर पाणी आहे. ह्यांत किती दूध मिळवावें म्हणजे त्यांत शेंकडा ७५ भाग दूध होईल ?

ह्या मिश्रणांत ४० शेर पाणी असून तें कायम राहणारें आहे. इच्छिलेलें प्रमाण असें आहे कीं,

पाणी : दूध = २५ : ७५.

परंतु २५ : ७५ = ४० : १२०.

ह्या १२० शेरांत ६० शेर दूध पूर्वींचें आहे, म्हणून त्यांत नवीन ६० शेर दूध घालावें म्हणजे १६० शेर मिश्रण होऊन त्यांत शेंकडा ७५ भाग दूध होईल हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ज्ञ.

१. १०६५ ह्या संख्येचे तीन भाग करा. असे कीं, ते ३, ५, ७ ह्या प्रमाणांत येतील. तसेच आणखी तीन भाग करा. असे कीं, ते $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{७}$ ह्या संख्यांच्या प्रमाणांत येतील.

२. अ, ब, क, ह्या त्रिवर्गांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला. त्यांत प्रत्येकाचें भांडवल अनुक्रमानें १२८० रु., १७६० रु. आणि १९२० रु. ह्याप्रमाणें होतें. पुढें त्या व्यापारांत त्यांस तीन वर्षांनीं ७९१ रुपये नफा झाला, तो त्यांस कसा वांटून द्यावा ?

३. १५३० रुपये ५ मनुष्यांस वांटून द्या. असे कीं, ते भाग $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{६}$ आणि $\frac{१}{७}$ ह्या प्रमाणांत येतील.

४. ९६ कशी सोनें ४ तोळे घेऊन तें ९० कशी ५ तोळे सोन्यांत मिळविलें, त्या मिश्राचा एक दागिना साडेचार तोळे वजन आहे; तेव्हां त्यांत शुद्ध सोनें किती आहे तें सांगा. *

५. एक तोफ २।॥३ वजनाची ओतावयाची आहे, तर तिच्या मिश्र धातूंत तांबें व कथील किती घालावें ? तोफेच्या धातूंत १०० भाग तांब्यास ११ भाग कथील असतें.

६. सुर्ती रुपयांत ३७ भाग रुपें आणि ३ भाग तांबें असतें. असें ह्मटलें तर एक रुपयांत शुद्ध रुपें किती असेल तें सांगा. रुपयाचें वजन साडे अकरा मासे आहे.

७. अ आणि ब ह्यांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, त्या व्यापारांत त्यांचीं भांडवलें ५ : ४ ह्या प्रमाणांत होतीं. पुढें तीन महिन्यांनीं आपल्या भांडवलाचे अनुक्रमें $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{३}{४}$ त्यांनीं त्यांतून काढून घेतले, आणि वर्षाच्या अंतीं पाहतात तों त्या व्यापारांत त्यांस ३३५ रुपये नफा झाला. तो त्यांनीं कसा वांटून घ्यावा ?

---

* शुद्ध सोनें १०० कशी मानलें आहे.

८. ९० कशी सोनें ८ तोळे आणि ९२ कशी सोनें ९ तोळे हीं दोन्ही सोनीं कस माहीत नाहीं अशा तिसऱ्या प्रकारच्या ६ तोळे सोन्यांत मिळविलीं, आणि त्या मिश्र सोन्याचा कस ८८ आला. तेव्हां सहा तोळे सोनें कोणते कसाचें होतें तें सांगा.

९. १४०० ह्या संख्येचे असे चार भाग करा कीं १, २, ३, ४ ह्या संख्यांत जें प्रमाण आहे, तें प्रमाण त्या भागांत येईल.

१०. अ, ब, क, ह्यांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, तेव्हां त्यांचीं भांडवलें $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ आणि $\frac{1}{4}$ ह्या प्रमाणांत होतीं; पुढें ४ महिन्यांनीं अनें आपल्या द्रव्याचा $\frac{1}{2}$ त्यांतून काढून घेतला, आणि ९ महिन्यांत एकंदर २०० रुपये नफा मिळाला तो वांटून घेऊन त्यांनीं व्यापार सोडला. तेव्हां प्रत्येकास नफा किती आला तें सांगा.

११. विलायतेंत बंदुकीच्या दारूंत ७५ भाग सोरा, १० भाग गंधक, आणि १५ भाग कोळसा, ह्याप्रमाणें आग्नेय (जळणारे) पदार्थ असतात, व फ्रान्स देशांतील दारूंत ७७ भाग सोरा, ९ भाग गंधक, आणि १४ भाग कोळसा, ह्याप्रमाणें आग्नेय असतात. आतां दोन्ही देशांतील दारू अर्धा अर्धा मण घेऊन एकत्र केली, तर त्या मिश्रणांत सोरा, गंधक व कोळसा हे पदार्थ किती किती होतील ?

१२. आठवड्यांतील रविवार खेरीज करून बाकीच्या दिवसांत अ दररोज ९ तास काम करितो, आणि ब पहिले दोन दिवस खेळतो, आणि बाकीच्या चार दिवसांत दररोज काम ६। तास, ८॥ तास, १०॥। तास आणि १२ तास ह्याप्रमाणें करतो. असें एका महिन्यांत त्या उभयतांनीं मिळून ११६॥ रुपयांचें काम केलें. तेव्हां प्रत्येकास काय मिळावें तें सांगा.

१३. मद्रास इलाख्यांतील मोहोरांचें सोनें ९० कशी असतें व एका शेरांत २४ मोहरा भरतात, तेव्हां ह्या १०० मोहोरांत शुद्ध सोनें किती असेल ?

१४. अ आणि ब ह्या उभयतांनीं मेंढ्या चारण्याकरितां एक कुरण एक वर्षाच्या बोलीनें २७५ रुपयांस घेतलें, त्यांत आरंभीं

अनें ८० मेंढ्या घातल्या आणि बनें १०० घातल्या. पुढें सहा महिन्यांनीं प्रत्येकानें आपापल्या अर्ध्या मेंढ्या विकल्या, आणि त्या कुरणांत कच्या ५० मेंढ्या घेतल्या, तेव्हां वर्षाचे अंतीं प्रत्येकानें काय द्यावें ?

१५. पाणी दोन वायूंच्या मिश्रणापासून होतें, व त्या मिश्रणांत ८८९ भाग आक्सिजन आणि १११ भाग हैड्रोजन असतो. तेव्हां एक घनफूट पाण्यांत म्हणजे १००० औंस पाण्यांत हे दोन्ही वायु किती किती असतील ?

१६. ३००० रुपये अ, ब, क, ह्या तिघांस वांटून द्यावयाचे. ते असे कीं, अला बच्या दुप्पट, आणि कला, अ आणि ब ह्यांच्या बेरजेच्या दुप्पट. तेव्हां प्रत्येकास किती रुपये येतील ?

१७. ८०, ८५, ९० आणि ९५, ह्या चार कसांचें सोनें अनुक्रमें १०, ४, २ आणि ४ तोळे घेऊन एकत्र केलें, तर तें मिश्र सोनें कोणते कसाचें होईल ?

१८. वरील मिश्र सोनें शुद्ध होण्याकरितां १७ तोळे राहीपर्यंत जाळलें, तर बाकीचे सोन्यास कस काय लागेल; अथवा जर जाळून बाकी राहिलेल्या सोन्याचा कस ९८ आला, तर सोनें किती जळून गेलें तें सांगा.

१९. एका विहिरींतिल गाळ काढावयास अ, ब, क, ह्या तिघांस बोलाविलें, परंतु पांट्या दोनच होत्या म्हणून पहिल्यानें अ आणि ब कामास लागले. त्यांत अ एका घटकेंत ३७ पांट्या गाळ काढी, आणि ब ४० पांट्या काढी, ह्याप्रमाणें पांच घटका काम केल्यावर पुढें ते प्रत्येक दर घटकेस पांच पांट्या गाळ कमी काढूं लागले. ह्याप्रमाणें ५ घटका गेल्यावर अ थकला. तेव्हां क कामास लागला. तो एक घटकेंत ३० पांट्या काढी; ह्याप्रमाणें काम करून २२ घटकांत त्यांनीं सर्व गाळ काढला. त्या मजुरीबद्दल त्यांस ६॥ रुपये मिळाले, तेव्हां प्रत्येकानें काय घ्यावें तें सांगा.

२०. अ आणि ब ह्या उभयतांनीं पांचपांचशें रुपये घेऊन

सर्कतीनें व्यापार आरंभिला. पुढें तीन महिनें झाल्यावर अनें आपल्या भांडवलांतून २०० रुपये काढून घेतले, आणि बनें रु. २०० आपल्या भांडवलांत घातले, व पुढें आणखी तीन महिने गेल्यावर पुन्हां त्याचप्रमाणें केलें आणि वर्षाच्या अखेरीस हिशेब पाहतात तों व्यापारांत बूड येऊन ४०० रुपयांचा माल शिल्लक राहिला, तो त्यांस वांटून घेणें आहे, तर प्रत्येकास किती येईल तें सांगा.

२१. पौंड ५९३ . ८ . ६. ह्यांचे २·३ : ३·४५ : ५·६२९ ह्या प्रमाणांत वांटे करा.

२२. एकाची जिनगी ४७१ पौं. १२ शि. ६ पे. आहे. त्यानें मृत्युपत्रांत अशी इच्छा दाखविली आहे कीं, आपल्यामागें ह्या जिनगीचा $\frac{1}{2}$ कला द्यावा, $\frac{1}{3}$ खला द्यावा, $\frac{1}{4}$ गला द्यावा, आणि $\frac{1}{5}$ घला द्यावा. ही याची इच्छा अमलांत कां आणतां येणार नाहीं हें स्पष्ट करा.

२३. एका आरबापाशीं ७ घोडे होते. त्यानें मृत्युपत्रांत अशी इच्छा दाखविली होती कीं, आपल्या जिनगीची निम्में पहिल्या मुलाला, त्याची निम्में दुसऱ्या मुलाला, त्याची निम्में तिसऱ्या मुलाला ह्या रीतीनें बिनकसर वांटणी तिघांस करून द्यावी, तर प्रत्येकाच्या वांट्यास किती किती घोडे येतील ?

२४. एक साव्हरीन क, ख, ग, या तिघांस २ प्रकारांनीं वांटा. प्रथम कला द्याल त्याचा $\frac{1}{3}$ खला अधिक द्या, आणि खला द्याल त्याचा $\frac{1}{4}$ गला अधिक द्या. नंतर कला द्याल त्याचा $\frac{1}{4}$ खला अधिक द्या, आणि क, ख, ह्यांना द्याल त्याचे $\frac{2}{3}$ गला द्या.

२५ तीळ, कर्डई व भुइमूग ह्यांच्या तेलांनीं भरलेलीं भांडीं अनुक्रमें ३६, ५४ व ७८ शेरांचीं आहेत. हीं तिन्ही भांड्यांतील तेलें एकत्र करून पुन्हां तीन भांड्यांत भरलीं, तर भुइमुगाच्या तेलाच्या भांड्यांत तिळाचें व कर्डईचें तेल किती किती शेर जाईल ?

२६. प, फ, ब, भ, ह्या चौघां पातीदारांनीं मिळून २३८००

पौंडांचा व्यापार ४ महिने केल्यानें त्यांना अनुक्रमें पौं. २६.११.८; पौं. ३७. ४. ४; पौं. ५३. ३. ४; पौं. ६३. १६; ह्याप्रमाणें नफा झाला. ह्यावरून त्यांच्या पात्या केवढाल्या होत्या ?

२७. ब आणि फ ह्यांनीं ५०० व ३०० रुपये एकत्र करून सर्कतीनें व्यापार चालू केला. चार महिन्यांनीं बनें आपलें भांडवल दुप्पट केलें, आणि रचे ३५० रु. सर्कतींत घेतले सहा महिन्यांचे अखेरीस फनें आपलें भांडवल तिप्पट केलें. आणि वर्षाचे अखेरीस ह्यांना ७५० रु. नफा झाला. तर ह्याची वांटणी कसकशी होईल ?

२८. क आणि ख ह्यांनीं ४ : ५ प्रमाणाचीं भांडवलें घेऊन भागीदारीचा व्यापार चालू केला. तीन महिन्यांनीं त्यांनीं आपापल्या भांडवलाचे $\frac{1}{4}$ व $\frac{3}{5}$ हे त्यांतून काढून घेतले, वर्षाचे अखेरीस त्यांना ४३६ पौं. ९ शि. ६ पे. नफा झाला. हा इसमवार कसा वांटावा ?

२९. ३४ पौं. १५ शि. १० पे. कर्जाबद्दल, क्रौन, शिलिंग व पेन्स हीं नाणीं ४ : ७ : १० ह्या प्रमाणांत दिलीं, तर प्रत्येक प्रकाराचीं नाणीं किती किती होतीं ?

३०. अ आणि ब ह्यांनीं २१ गिन्नीला १ कुरण भाड्यानें घेतलें. ह्या कुरणांत अनें १० घोडे १॥ महिना, ३० बैल २ महिने, आणि १०० मेंढ्या ३। महिने ठेविल्या; आणि बनें ४० घोडे २॥ महिने, ५० बैल १। महिना, आणि ११५ मेंढ्या ३ महिने ठेविल्या. घोडा, बैल व मेंढी ह्यांच्या एका दिवसांतल्या खादी ३ : २ : १ ह्या प्रमाणांत असतात, तर त्यांनीं किती किती पैसा द्यावा ?

३१. ७६५० रुपये १० पुरुष, ३२ स्त्रिया आणि ४८ मुलें ह्यांत वांटणें आहेत. ह्यांत एका पुरुषाइतका पैसा दोन स्त्रियांस देणें आहे, व ३२ स्त्रियांना ४८ मुलांच्या दुप्पट पैसा यावयाचा आहे, तर प्रत्येक स्त्रीला काय मिळेल ?

३२. २३ हंड्रेडवेट १ कार्टर ९ पौंड यांचे ११। घनफूट : ३$\frac{2}{3}$ घनयार्ड ह्या प्रमाणांत भाग करा.

३३. तीन अपूर्णांकांची बेरीज $\frac{१८३}{२४२}$ आहे, आणि पहिल्याची २२ पट, दुसऱ्याची २३ पट आणि तिसऱ्याची २४ पट ह्या संख्या समान येत आहेत. ह्यावरून ते अपूर्णांक सांगा.

३४. ३२ ग्यालन ३ क्वार्टर १॥ पैंट इतका प्रवाही पदार्थ चार भांड्यांत वांटा. असा कीं, पहिल्यास दुसरा तसे ९ : १४, दुसऱ्यास तिसरा तसे २१ : २५ आणि तिसऱ्यास चौथा तसे २० : ३३.

३५. एक पौंड चहा, एक पौंड काफी व एक पौंड साखर, ह्यांस मिळून ५ शि. ८॥ पे. पडत आहेत. ७ पौंड चहाची किंमत १६ पौंड काफीच्या इतकी आहे, आणि तीन पौंड काफीला ११ पौंड साखरे इतका पैसा पडत आहे, तर प्रत्येकाची किंमत सांगा.

३६. अशा तीन महत्तम पूर्ण संख्या सांगा कीं त्यांची बेरीज १ प्रयुतापेक्षां कमी व्हावी, पाहिली व दुसरी ह्या संख्यांचें प्रमाण ५ या. २ फू. ६ इं. : ५ या. ३ क्वा. २॥ नेल हें असावें. आणि दुसरी संख्या ही तिसरीचे $\frac{\text{३ हं. ३ क्वा. १२ पौं.}}{\text{४ हं. २ क्वा. १६ पौं.}}$ ह्यांबरोबर असावी.

(२$\frac{१}{४}$ इंच = १ नेल. ४ नेल = १ क्वार्टर. ४ क्वार्टर = १ यार्ड.)

३७. पांच शहरांनीं मिळून २०० शिपाई द्यावयाचे आहेत. शहरांतील लोकसंख्या अनुक्रमें २८३००, २५७५०, १६४३२, ८४५४ आणि २३६४८ अशा आहेत. तर प्रत्येक शहरानें किती किती शिपाई द्यावे तें पूर्ण विचारानें सांगा.

व्याज.

१११. दुसऱ्याच्या मालकीचें द्रव्य परत करण्याच्या कबुलायतीनें त्यापासून कोणी वापरण्याला घेतो, तेव्हां त्या द्रव्याला **ऋण** किंवा कर्ज ह्मणतात, तें घेणाराला **ऋणको** किंवा **कर्जदार** ह्मणतात, आणि तें देणाराला **धनको** किंवा **सावकार** ह्मणतात.

कर्ज घेतलेलें द्रव्य परत होईपर्यंतच्या त्याच्या उपयोगाबद्दल जी ठरविलेली रक्कम कर्जदारानें सावकाराला द्यावी असें ठरतें तिला **व्याज** ह्मणतात.

१४४. ह्या कर्ज घेतलेल्या द्रव्याला **मुद्दल** ह्मणतात.

१४५. मुद्दल कर्जदाराच्या उपयोगांत राहिल्याचा जो विचारणीय काळ त्याच्या संख्येला कालमानें किंवा **मुदती** ह्मणतात.

१४६. मुद्दलांतील दरशेंकड्यास दरमुदतीस (प्रत्येक कालमानास) जें व्याज पडतें त्याला **व्याजाचा दर** ह्मणतात.

१४७. दरशेंकड्यास दरमहिन्यास जें व्याज पडतें त्याला विशेषेंकरून मिति ह्मणतात, तरी केव्हां केव्हां **दरही** ह्मणतात.

१४८. मुद्दल आणि व्याज मिळून जी रक्कम होते तिला **रास** किंवा **राशि** ह्मणतात.

१४९. व्याजाचे प्रकार **सरळव्याज** आणि **चक्रवाढव्याज** असे दोन आहेत.

सावकारापासून घेतलेल्या रकमेचें व्याज दरसाल अगर दरमुदतीस देत गेलें ह्मणजे आपलेकडे सावकाराचें मुद्दलच देणें राहतें. परंतु मुदतीस व्याज दिलें नाहीं तर व्याजाची रक्कमही मुद्दलांत भर पडून कर्ज फुगतें आणि आकारणीचे वेळीं मुद्दलाबरोबर त्याचे व्याजावरही व्याजाची आकारणी होते. अशा प्रकारच्या व्याजास **चक्रवाढव्याज** ह्मणतात.

सरळव्याज.

१५०. जें व्याज एकंदर मुदतीपावेतों मुद्दलावरच आकारलें जातें, त्या मुदतींतील प्रत्येक कालमानाच्या व्याजावर आकारलें जात नाहीं, त्याला **सरळव्याज** ह्मणतात.

व्याजाच्या प्रत्येक प्रश्नांत **मुद्दल, मुदती** किंवा **कालमानें, व्याजाचा दर** आणि **व्याज** ह्या चार गोष्टींचा संबंध असतो.

ह्या चोहोंपैकीं कोणत्याही तीन गोष्टींपासून चवथी काढतां येते, ह्मणून ह्या उदाहरणांचे मुख्य प्रकार चार होतात.

१५१. प्रकार १ ला.—मुद्दल, मुदती, व दर, ह्यांपासून व्याज किंवा राशि काढावयाचा.

उदाहरण १ लें. दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याज ह्या दरानें ७२५ रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज व राशि काय होईल ?

ह्या उदाहरणाचें रूप असें आहे कीं, १ वर्षास शंभर रुपयांस ५ रुपये व्याज, तर ३ वर्षांस ७२५ रुपयांस किती व्याज ?

१ वर्ष का. : ३ वर्षें का.
१०० रु. मु. : ७२५ रु. मु. } = ५ रु. व्या. : काय व्या.

व्याजाची वाढ कालमानाच्या समप्रमाणांत व मुद्दलाच्याही समप्रमाणांत व्हावयाची, ह्मणून दोन्ही प्रमाणें सम आहेत.

∴ काय व्या. = ५ रु. व्या. × $\frac{७२५}{१००}$ × ३ = १०८·७५ रु.
= १०८ रु. १२ आ.
हें पहिलें उत्तर.

व राशि = ७२५ रु. (मुद्दल) + १०८ रु. १२ आणे (व्याज).
= ८३३ रु. १२ आ. हें दुसरें उत्तर.

सूचना १ ली.—वरच्या बहुराशिकांतलें प्रथम १ लें त्रैराशिक करून नंतर २ रें त्रैराशिक करावें ह्मणजे व्याज आकारण्याचा १ ला समंजस क्रम दिसून येतो. जसा.—

क्रम १ ला.—दर व मुदत ह्यांचा गुणाकार करावा ह्मणजे १०० रुपयांचें त्या मुदतीचें व्याज येतें. नंतर तें व्याज मुद्दलानें गुणून १०० नें भागावें ह्मणजे त्या मुद्दलाचें त्या मुदतीचें व्याज येतें.

अथवा प्रथम दुसरें त्रैराशिक करून नंतर पहिलें त्रैराशिक करावें ह्मणजे व्याज आकारण्याचा २ रा समंजस क्रम दिसून येतो. जसा.—

क्रम २ रा.—दर व मुद्दल ह्यांचा गुणाकार करून तो शंभरानें भागावा ह्मणजे त्या मुद्दलाचें १ कालमानाचें व्याज येतें.

नंतर तें व्याज मुदतीनीं गुणावें ह्मणजे त्या मुदलाचें त्या मुदतीचें व्याज येतें.

सावकार लोक बहुराशिकें अगर त्रैराशिकें मांडीत नाहींत. वर दिलेल्या कोणत्याही समंजस क्रमानें व्याजाची आकारणी करितात.

उदाहरण २ रें. दरसाल दर शेंकडा २। रु. व्याज पडतें, तर २१२॥- चे २॥। वर्षांचें व्याज काय ?

	६८≈
२॥। मुदत.	२१२॥-
२। दर.	१२७५।=
५॥	२६॥-
·॥≈) शंभरांचें २॥।	१३१·॥
६८≈) मुदतीचें व्याज.	१००) १३'१५८≈॥ (१३८=। हें उ.

उदाहरण ३ रें. ३२५॥ रुपयांचें व्याज ता. २३ डिसेंबर सन १८८४ पासून ता. २६ मार्च सन १८८८ पावेतों दोन्ही तारखा धरून किती येईल ? व्याजाचा दर दरसाल दरशेंकडा ४ रुपये आहे.

ता. २३ डिसेंबर १८८४ पासून ता. २२ डिसेंबर सन १८८७ पावेतों दोन्ही तारखा धरतां वर्षं ३ होतात. पुढील दिवस.

१८८७ डि.	९	३२५·५ रु.
१८८८ जाने.	३१	४ दर.
फेब्रु.	२९	१०० | १३'०२०
मार्च	२६	
	९५	

∴ मुदलाचें १ वर्षांचें व्याज = १३·०२ रु.

∴ मुदलाचें १ दिवसाचें व्याज = १३·०२ / ३६५

मुदलाचें ९५ दिवसांचें व्याज = (१३·०२ रु. × ~~९५~~ १९) / (~~३६५~~ ७३)

$$= \frac{२४७\cdot३८\text{रु.}}{७३}$$

$= ३\cdot३९$ रुपये

आणि मुद्लाचें ३ वर्षांचें व्याज $= १२\cdot०२$ रु. $\times$ ३.

$= ३९\cdot०६$ रु.

∴ एकंदर व्याज $= ४२\cdot४५$ रु. $=$ ४२ रु. ७ आ. २ पै

हें उत्तर

रीति.—मुद्दल, मुदती व दर ह्यांचा गुणाकार एका मुदतीच्या १०० ह्या मुद्लानें भागावा, ह्मणजे व्याज येतें.

१५२. येथें मुद्दल = म, मुद्ती किंवा कालमान = क, दर = द, व्याज = व्य, आणि राशि = र हे सूचकवर्ण घेतले तर वरील रीति सामान्य सारण्यांनीं थोडक्यांत दाखवितां येतात. जशा.—

$$\text{व्य} = \frac{\text{म क द}}{१००} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (१)$$

$$\text{आणि}\quad \text{र}, = \text{म} + \frac{\text{म क द}}{१००} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (२)$$

१ ल्या सारणीवरून तींतील प्रत्येक वर्णांबरोबर किमती काढाव्या ह्मणजे सरळव्याजाचे सर्व प्रकार दाखविले जातात. जसें—

$$\text{म} = \frac{१००\ \text{व्य}}{\text{क द}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (३)$$

$$\text{क} = \frac{१००\ \text{व्य}}{\text{म द}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (४)$$

$$\text{आणि}\quad \text{द} = \frac{१००\ \text{व्य}}{\text{म क}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (५)$$

उदाहरण ४ थें. २४० पौंड १२ शि. ६ पे. ह्याचें दरसाल दरशेंकडा २॥ प्रमाणें ८॥। वर्षांचें व्याज काय?

सारणी (१) प्रमाणें विविधांत	दशांशांत.
पौं. शि. पे. फा.	पौं.
२४० १२ ६ ० म.	२४०·६२५
२॥ द.	$२\frac{१}{२}$
४८१ ५ ०	४८१·२५०
१२० ६ ३	१२०·३१२५
६०१ ११ ३	६०१·५६२५
$९-\frac{१}{४}$ क.	$९-\frac{१}{४}$
५४१४ १ ३	५४१४·०६२५
−१५० ७ $९\frac{३}{४}$	−१५०·३९०६
१००)५२'६३ १३ $५\frac{१}{४}$	१००)५२'६३·६७१९ पौं.
२०	× २०
१२'७३ शि.	१२·७३४३८० शि.
१२	× १२
८'८$१\frac{१}{४}$ पे.	८·८१२५६० पे.
४	× ४
३'२५ फा.	३·२५०२४० फा.

ह्मणून ५२ पौं. १२ शि. $८\frac{३}{४}$ पे. हें उत्तर.

सूचना २ री.–मुदतीचे जागीं महिने व दिवस मोघम (नांवावांचून) दिलेले असले तर एका मुदतीचे जागीं एका वर्षांचे महिने १२ व एका महिन्याचे दिवस ३० धरून त्या मागाप्रमाणें उत्तर काढतात.

उदाहरण ५ वें. ५१२ रु. १३ आ. ४ पै ह्यांचें शेंकडा $४\frac{५}{६}$ रुपये दरानें ३ वर्षें ७ महिने २१ दिवसांचें व्याज काय?

प्र. १ प्र.

विविधांत.

	रु.	आ.	पै.
म.	५१२	१३	४
द.		$४\frac{५}{१६}$ रु.	
	२०५१	५	४
	२५६	६	८
	६४	१	८
	२३७१	१३	८
क.			३ वर्षें.
	७११५	९	०
६ म.	११८५	१४	१०
१ म.	१९७	१०	$५\frac{२}{३}$
१५ दि.	९८	१३	$२\frac{५}{६}$
६ दि.	३९	८	$५\frac{१४}{१५}$
१००	८६'३७	८	$०\frac{१३}{३०}$
			१६
	६'००	·	· आ.

दशांशांत.

	रु.
	५१२·८३३३
	$४\frac{५}{१६}$ रु.
	२०५१·३३३३
	२५६·४१६६
	६४·१०४१
	२३७१·८५४०
	३ वर्षें.
	७११५·५६२०
६ म.	११८५·९२७०
१ म.	१९७·६५४५
१५ दि.	९८·८२७२
६ दि.	३९·५३०९
१००	८६'३७·५०१६
	१६
	६'०००२५६ आ.

ह्मणून ८६ रु. ६ आ. ० पै हें उत्तर.

सूचना ३ री.—मुदत आठवड्यांत दिली असली तर एका मुदतीच्या जागीं ५२ आठवडेच घेऊन ५२०० नीं भागितात.

उदाहरण ६ वें. दरसाल दरशेंकडा $४\frac{१}{२}$ टक्केप्रमाणें ३२०।।।=।।। चें १७ आठवड्यांचें व्याज काढा.

		३२०।।।=।।।
		४।।
		१२८३।।≈
		१६०।≈।=
		१४४४०=।=
		१७
५२	१३	२४५५०।।·।=
	४	१८८८।।

१००|४·७२०=
४
२·८८ पा.
४
३·५४ आ.
४
२·१६ पा. आ.

ह्मणून ४।।≈।। हें उत्तर.

सूचना ४ थी.—मुदत दिवसांत दिली असली तर मुद्दल, मुदतीचे दिवस व दर ह्यांच्या गुणाकाराला ३६५०० नीं भागावें अथवा मुद्दल, मुदतीचे दिवस व दराची दुप्पट ह्यांच्या गुणाकाराला ७३००० नीं भागावें.

येथें गुणाकार हा भाज्य, व ७३००० हा भाजक ह्या दोहोंच्याही $१ + \frac{१}{३} + \frac{१}{३०} + \frac{१}{३००}$ इतकाल्या पटी केल्या, तर त्याचा भागाकार बदलणार नाहीं व भाजकाची पट १०००१० इतकी येईल. जशी—

	७३०००
$\frac{१}{३}$	$२३३३३\frac{१}{३}$
$\frac{१}{३}$ चा $\frac{१}{१०}$	$२४३३\frac{१}{३}$
$\frac{१}{३०}$ चा $\frac{१}{१०}$	$२४३\frac{१}{३}$
	१०००१०

ह्या भाजकाच्या पटींत १० हा तिचा $\frac{१}{१००००}$ वजा केला, तर बाकी १००००० पट राहते. ह्यावरून येथें जी भाजकाची कृति केली तीच भाज्याशीं करून त्यांवरचीं पांच स्थळें मोजून दशांशचिन्ह केलें तर ती संख्या इच्छिला भागाकार दाखवील. ह्मणून,

तृतीयांशादि रीति.—दशांशाखेरीज भाज्याखालीं त्याचा तृतीयांश मांडावा, त्याखालीं त्याचा दशांश व त्याखालीं त्याचा दशांश मांडावा, ह्या सर्वांच्या बेरजेंतून तिचा दशसहस्रांश वजा करावा, आणि त्या बाकीवरचीं ५ स्थळें मोजून दशांशचिन्ह करावें, ह्मणजे इच्छिला भागाकार येईल.

उदाहरण ७ वें. ४२० रुपये ११ आणे ह्यांचें शेंकडा $४\frac{१}{२}$ दरानें ता० १९ मार्च १८६८ पासून ता० ८ सप्तंबर १८७० पावेतों मुदतीचें व्याज काय होईल?

येथें कर्ज घेतल्याची तारीख व फेडण्याची तारीख मिळून एक दिवस धरावयाचा ह्मणून मूळची तारीख सोडून शेवटची मोजली तर तारीख १९ मार्च १८७० पावेतों २ वर्षे होतात.

२ वर्षांचे	दिवस	७३०
मार्च	,,	१२
एप्रिल	,,	३०
मे	,,	३१
जून	,,	३०
जुलई	,,	३१
आगस्ट	,,	३१
सप्तंबर	,,	८
		९०३

सूचना ४ थी प्रमाणें

मुद्दल रुपये ४२०.६८७५
दराची २ पट ९
३७८६.१८७५
दिवस ९०३
११३५८५६२५
३४०७५६८७५
७३,०००|३४१८९२७.३१२५
४९८ (४६.८३४६
६०९
२५२
३३७
४५३

अथवा तृतीयांशादि रीतीनें,

३४१८९२७.३१२५
$\frac{1}{3}$ ११३९६४२
$\frac{1}{10}$ ११३९६४
$\frac{1}{10}$ ११३९६
४६८३९२९
४६८ वजा ($\frac{1}{100000}$)
४६.८३४६१ रु.
१६
१३.३५३७६ आ.
१२
४.२४५१२ पै.

∴ ४६ रुपये १३ आणे ४ पै हें उत्तर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. का.

(पुढील उदाहरणांपैकीं पहिलीं १० उदाहरणें एकमानगणित, त्रैराशिक व सारण्या ह्यांचा उपयोग करून निरनिराळ्या तऱ्हांनीं सोडवा.)

१. ५०० रुपये मुदलाचें दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें पांच वर्षांचें व्याज किती येईल ?

२. दरसाल दरशेंकडा ४ रुपयेप्रमाणें ३ वर्षांचें ३०५ रुपयांचें व्याज काय होईल ?

३. मुद्दल पौंड ३७५, यास व्याज दरसाल दरशेंकडा ४ पौंड प्रमाणें वर्षे ३ झालीं, व्याज काय येईल ?

४. ११३५ रुपयांची रास ४ वर्षांनीं किती होईल ? व्याजाचा दर ३ रुपयेप्रमाणें आहे.

५. १२४५ रुपयांचें १५ वर्षांचें व्याज दरसाल दरशेंकडा ४$\frac{3}{4}$ रुपयेप्रमाणें किती होईल ?

६. २००० पौंडांची रास १२$\frac{1}{4}$ वर्षांनीं किती होईल ? व्याज दरसाल दरशेंकडा ३$\frac{1}{2}$ पौंडप्रमाणें आहे.

७. दरसाल दरशेंकडा ३$\frac{3}{8}$ रुपये व्याजाप्रमाणें ८$\frac{3}{4}$ वर्षांनीं ५७५ रुपयांची रास किती होईल ?

८. ५॥ वर्षांनीं ३२५॥ रुपयांचें व्याज दरसाल दरशेंकडा ५॥ रुपयेप्रमाणें किती होईल ?

९. ५०० पौंड १३ शि. ४ पे. ह्यांचें २$\frac{3}{4}$ वर्षांचें २$\frac{3}{4}$ पौंडप्रमाणें व्याज किती होईल ?

१०. १५० रुपये मुदलाचें दरसाल दरशेंकडा ४ रुपयेप्रमाणें ३$\frac{5}{12}$ वर्षांचें व्याज काय द्यावें ?

सूचना—मुदतींत वर्षे, महिने व दिवस हे असले तर त्यांस व्यवहारी अपूर्णांकांत वर्षांचें रूप देऊन वर सांगितल्याप्रमाणें उत्तर काढावें. अथवा वर्षे, महिने व दिवस ह्यांचें व्याज निरनिराळें करून मग त्यांची बेरीज घ्यावी.

११. दरसाल दरशेंकडा ४$\frac{5}{8}$ रुपयेप्रमाणें ५०० रुपयांचें व्याज, सन १८५१ चे मार्च महिन्याचे १ ले तारखेपासून १८५३ तील जानेवारीच्या ९ वे तारखेपावेतों करून एकंदर रास काय होईल ती सांगा.

१२. मेच्या ५ वे तारखेपासून २६ आक्टोबरपावेतों, दरसाल दरशेंकडा ३८≈ प्रमाणें ७५०० रुपयांची रास काय होईल ?

१३. रु. ११५८॥≈ ह्याची, सन १८४० च्या मार्च महिन्याचे

१६ वे तारखेपासून १८४२ च्या आक्टोबर महिन्याचें ३० वे तारखेपर्यंत रास, शेंकडा २॥ रुपयेप्रमाणें व्याज केल्यानें किती होईल ?

१४. मुद्दल रुपये ३५४७।-, व्याजाचा दर २॥=, चार वर्षें आणि २२५ दिवस झाले, व्याज किती होईल ?

१५. ३ वर्षें ११० दिवसांचें व्याज २२५॥। रुपयांचें दरसाल दरशेंकडा १३८=॥ प्रमाणें किती तें सांगा.

१६. पौं. ३३. १३. ४ चें १५ वर्षांचें व्याज दरसाल दरशेंकडा ४$\frac{५}{८}$ प्रमाणें काय येईल ?

१७. ६५४१। रुपयांचें ४॥ वर्षांचें दरसाल दरशेंकडा ४॥ रुपयेप्रमाणें व्याज काय होईल ?

१८. पौं. ३४५० १२ शि. ७ पेन्सचें ८॥ वर्षांचें ४$\frac{५}{८}$ दरानें व्याज काय ?

१९. ४५७ रु. १२ आण्यांचें १॥। वर्षांचें २॥। दरानें व्याज सांगा.

२०. रु. ९६४९।= चें ४॥। दरानें १ वर्ष २१९ दिवसांचे व्याज काढा.

२१. पौं. ३१७. १०. २$\frac{३}{४}$ चें ३$\frac{५}{८}$ दरानें ३ वर्षें ७३ दिवसांचें व्याज काय आकारेल ?

२२. पौं. २७. १६. ९ चें दरसाल दरशेंकडा पौं. ३. १२. ६ प्रमाणें ४ वर्षें ७ महिन्यांचें व्याज आकारा.

२३. १००० गिनींचें ४$\frac{३}{८}$ दरानें १ वर्ष ५ महिन्यांचें व्याज काढा.

२४. रु. ४६०१॥। चें ४॥। दरानें ३ वर्षें ८॥। महिन्याचें व्याज काढा.

२५. रु ५५०७ऽ५०४ चें ४०१२ दरानें २ वर्षें ९ महिने २५ दिवसांचें व्याज काढा.

२६ रु. २६६६०१००८ चें ३०८ दरानें १९ आठवड्यांचें व्याज सांगा.

२७. पौं. ९८७. १५. ८$\frac{३}{४}$ चें पौं. ४. १३. ४ दरानें ३७ आठवड्यांचें व्याज काय ?

२८. रु. २२८५॥≈॥ चें ४॥। दरानें १ वर्ष २३ आठवड्यांचें व्याज काय ?

२९. पौं. ११०८ . १३ . ९ चे ५$\frac{1}{8}$ दरानें १९१ दिवसांचें व्याज काढा.

३०. रु. १८४१।॥= चें ५॥ दरानें तारीख १७ जुलईपासून तारीख ५ डिसेंबरपावेतों व्याज काढा.

३१. पौंड ८५३. ०. १० चें ३$\frac{1}{8}$ दरानें १८ वी जूनपासून २५ वी सतंबरपावेतों व्याज काढा.

३२. रु. ३०५७ चें ४$\frac{3}{4}$ दरानें चैत्र शु. ६ पासून पौष शु. ६ पावेतों व्याज काढा.

३३. पौं. १२५३. ८. ५ चें ३$\frac{3}{16}$ दरानें तारीख १६ जानेवारीपासून तारीख २३ मार्च (लीप वर्षाचा) पावेतों व्याज काढा.

३४. रु. १६४. १५. ११ चें ५$\frac{3}{16}$ दरानें श्रावण शु. ५ शके १८१८ पासून भा. शु. १३ शके १८१९ पावेतों व्याज काढा.

३५. पौं. १३२७. ३. ८ चें ५$\frac{3}{16}$ दरानें तारीख १८ आक्टोबर १८६९ पासून तारीख २७ मे १८७१ पावेतों व्याज आकारा.

---

१५३. प्रकार २ रा.–मुदत, व्याजाचा दर व व्याज ह्यांपासून मुद्दल काढण्याचा.

उ० ८ वें. दरसाल दरशेंकडा ६। रुपयेप्रमाणें ४॥ वर्षांत २७० रुपये व्याज येण्याला मुद्दल केवढें असावें ?

येथें ६। रुपये = ६·२५ रुपये, व ४॥ वर्षें = ४·५ वर्षें, ह्या किमती घेऊन वरील उदाहरण बहुराशिकाचे नमुन्यांत मांडिलें. जसें:—

स. ६·२५ रु. व्या. : २७० रु.
व्य. १ वर्ष : ४·५ वर्षें. } = १०० रु. मु. : उ. मु.

येथें ६·२५ रुपये व्याज १ वर्षास येण्याला १०० रुपये मुद्दल लागतें, तर २७० रुपये व्याज १ वर्षांत येण्याला मुद्दल जास्त पाहिजे. ह्मणून हें प्रमाण सम आहे.

दुसरें, १ वर्षास ६·२५ रुपये व्याज येण्याला १०० मुद्दल लागतें, तर ४·५ वर्षांस ६·२५ व्याज येण्याला मुद्दल कमी पुरेल. ह्मणून हें प्रमाण व्यस्त आहे.

मुदलाचा बदल व्याजाशीं सम प्रमाणांत व कालाशीं व्यस्त प्रमाणांत होतो, ह्मणून दुसऱ्या प्रमाणाचीं पदें बदलून बहुराशिक मांडिलें पाहिजे. जसें:—

$$\left.\begin{array}{l}\text{६·२५ रु व्या.} : \text{२७० रु. व्या.}\\ \text{४·५ वर्षें} : \text{१ वर्ष}\end{array}\right\} = \text{१०० रु. मु.} : \text{उ. मु.}$$

$$\therefore \text{उ.} = \frac{१०० \times २७०}{६·२५ \times ४·५} = \text{९६० रुपये हें उत्तर.}$$

वरील गुणकभाजक हे सारणी (३) मध्यें किमती ठेविल्याप्रमाणेंच आहेत ह्यावरून वरच्या उदाहरणाच्या किमती सा० (३) मध्यें मांडून हें उत्तर निघेल हें उघड आहे.

सूचना ५ वी.—ह्या प्रश्नांत दिलेल्या मुदतींचें इच्छिलेलें मुदलाचें व्याज न देतां राशि दिला असला तर त्यांतील व्याज हा राशि अज्ञात राहतो. म्हणून मुद्दल बहुराशिकानें किंवा सारणीनें काढितां येत नाहीं. तें प्रमाणभागांच्या आधारानें काढावें लागतें.

उदाहरण ९ वें. दरसाल दरशेंकडा ६ रुपये व्याजाच्या दरानें ५ वर्षांत ८१२॥ रु० राशि येण्याला मुद्दल केवढें पाहिजे ?

६ रु. दरानें १०० रुपयांचें ५ वर्षांचें व्याज ३० रु. होतें. ह्यावरून १३० रुपये राशींत १०० रु. मु. व ३० रु. व्याज आहे. तेव्हां ८१२॥ रुपये ह्या राशींत मुद्दल व व्याज हीं ह्याच प्रमाणांत असलीं पाहिजेत. ह्मणून त्रैराशिकानें—

$$\text{१३० रु. रा.} : \text{८१२·५ रु. रा.} :: \text{१०० मु.} : \text{क्ष मु.}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \text{१०० रु. मु.} \times \frac{८१२·५}{१३०} = \frac{१२५०}{२} \text{ रु.} = \text{६२५ रु.}$$

हें उत्तर.

१५४. प्रकार ३ रा.—मुद्दल, व्याजाचा दर व व्याज ह्यांपासून मुदत काढण्याचा.

उदाहरण १० वें. दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें १३६० रु. मुदलाचा राशि १८०२ रु. होण्याला मुदत केवढी पाहिजे ?

१८०२ − १३६० = ४४२ रुपये व्याज येतें. येथें १०० रुपयांचें १ वर्षाचें ५ रुपये व्याज येतें, तर १३६० रुपयांचें किती वर्षांचें व्याज ४४२ रुपये येईल ? हा प्रश्न आहे. ह्यांत वर्षें हीं एकमेच्या पदीं ह्यासबिणारीं आहेत. ह्मणून त्रैराशिक.—

रु. व. रु. व.

१००×१ : १३६०×क्ष = ५ रु. व्या. : ४४२ रु. व्या.

∴ प्र. नि. १ प्र. ५× १३६० क्ष = १०० × ४४२.

व $$क्ष = \frac{100 रु. \times 442}{5 \times 1360} = ६\tfrac{१}{२} \text{ वर्षें हें उत्तर.}$$

हें उदाहरण बहुराशिकांत मांडून व उ. ६ येथील नमुन्या-प्रमाणें समव्यस्त पाहून सारणी (३) मध्यें किमती ठेवूनही सोडवितां येईल.

उदाहरण ११ वें. दरसाल दरशेंकडा ८ रु. व्याजाप्रमाणें मुदलाच्या तिप्पट राशि होण्याला मुदत केवढी लागेल ?

शंभर रुपये मुदलाचें २०० रुपये व्याज येण्याला जेवढा काळ लागेल, तेवढाच काळ कोणत्याही मुदलाचें व्याज त्याच्या दुप्पट येण्याला लागेल. ह्मणून त्रैराशिकाप्रमाणें.—

८ रु. व्या. : २०० रु. व्या. = १ व. : क्ष.

∴ $क्ष = १ व \times \frac{२००}{८} = २५$ वर्षें हें उत्तर.

१५५. प्रकार ४ था.—मुद्दल, मुदत, व्याज ह्यांपासून व्याजाचा दर काढावयाचा.

उदाहरण १२ वें. ५२० पौंड मुद्दलाची ९ वर्षांत ७५४ पौंड रास होण्याला व्याजाचा दर केवढा ठेवावा ?

व्याज = ७५४ पौंड − ५२० पौं. = २३४ पौं. येतें. सारणी (५) मध्यें किमती ठेविल्यानें.—

$$द. = \frac{१०० \times व्या.}{म. क.} = \frac{१०० \times २३४}{५२० \times ९} = ५ \text{ पौं. हें उत्तर.}$$

अथवा एकमान गणितानें.—

५२० पौं. चें ९ वर्षांचें व्याज = २३४ पौं.

तर ५२० पौं. चें १ वर्षाचें व्याज = $\frac{२३४}{९}$ पौं. = २६.

१ ,, १ ,, ,, = $\frac{२६}{५२०}$ = $\frac{१}{२०}$ पौं.

∴ १०० ,, १ ,, ,, = $\frac{१००}{२०}$ पौं = ५ पौं.

उदाहरण १३ वें. १२½ वर्षांत दाम दुप्पट होण्याला व्याजाचा दर काय पाहिजे ?

मुद्दल १०० रुपये ह्मटलें तर त्याचें व्याज १०० व्हावयाचें. ह्मणून–

१०० रु. चें $\frac{२५}{२}$ वर्षांचें व्याज = १०० रु.

तर १०० रु. चें १ वर्षाचें ,, = $\frac{१००\text{रु}\times २}{२५}$ = ८रु. हें उ.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. ख्वा.

पुढील उदाहरणें सोडविण्यांत एकमान गणित, प्रमाणगणित (त्रैराशिक किंवा बहुराशिक) आणि सारण्या ह्यांचा उपयोग सोईस पडेल तसा करावा.

१. २¼ वर्षांत १०२॥ रुपयांचें १२॥ व्याज होण्यास व्याजाचा दर काय लावावा ?

२. दरसाल दरशेंकडा ६॥· रुपये प्रमाणें एका वर्षांत रास ४५ होण्यास मुद्दल काय असावें ?

३. ४९८ रु. १२ आणे ह्यांचें व्याज १०॥ रुपये होण्यास मुदत किती असावी ? व्याजाचा दर वरच्या प्रमाणेंच आहे.

४. १४६ दिवसांत २०० रुपयांचें व्याज ४॥।· रुपये होण्यास व्याजाचा दर काय असावा.

५. दरसाल दरशेंकडा ५॥ रुपये व्याजानें ७३२॥– मुद्दलाचें सव्याज रु. १७०९ होण्यास किती वर्षें लागतील ?

६. दरसाल दरशेंकडा ४$\frac{२}{३}$ रुपये व्याजाप्रमाणें ४९ रुपये व्याज दरसाल उत्पन्न होण्यास मुद्दल काय असावें ?

७. ४१२७ रुपयांचें व्याज एका वर्षांत ९२॥≈ होण्यास व्याजाचा दर काय असावा ?

८. मुद्दल किती रुपये असलें ह्मणजे २ वर्षें १ महिन्यांत, ५$\frac{३}{५}$ रु. व्याजाच्या दरानें १२१ रु. १३ आणे ४ पै व्याज उत्पन्न होईल ?

९. व्याजाचा दर कोणता लावावा ह्मणजे २२०॥ मुद्दलाचे एक वर्षांत सव्याज रु. २४०॥ होतील ?

१०. ४१९ रुपये मुद्दलाचे सव्याज ४८३॥ रुपये, दरसाल दरशेंकडा ४८≈ प्रमाणें होण्यास मुदत किती असावी

११. ३ वर्षें ७३ दिवसांत दरसाल दरशेंकडा ६$\frac{1}{4}$ रुपये प्रमाणें १०८– व्याज होण्यास किती रुपये मुद्दल असावें ?

१२. शेंकडा ४।।। रुपयेप्रमाणें ८१२॥·।। मुद्दलाचें ७७१।।।ॾ।। व्याज होण्यास मुदत किती असावी ?

केवढ्या मुद्दलाचा राशि—

१३. ५ वर्षांत ३।। च्या दरानें ७६२ पौंड होईल ?

१४. १$\frac{3}{4}$ वर्षांत ३$\frac{3}{4}$ दरानें २३५३ रुपये होईल ?

१५. १५॥ वर्षांत २।।। दरानें रु० ८४३६।।।– होईल ?

केवढ्या मुद्दलाचें —

१६. पौंड ३६ व्याज २$\frac{1}{2}$ वर्षांत ३$\frac{1}{8}$ दरानें होईल ?

१७. रुपये २३९८६ व्याज १२ वर्षांत ४।।। दरानें होईल ?

१८. रुपये १३७।।।ॾ।। व्याज ·।।· वर्षांत ३।।। दरानें होईल?

केवढे मुद्दलाचा राशि–

१९. रु. १३५७७८८ॾ इतका २ वर्षें ७ महिन्यांत ४॥ दरानें होईल?

२०. रु. ७२५६। इतका २ वर्षें ९ महिने १८ दिवसांत २॥ दरानें होईल ?

२१. ३$\frac{3}{4}$ दरानें १ वर्ष ९ महिने २४ दिवसांत रु. ५७८८५८४ व्याज येण्याला मुद्दल केवढें पाहिजे ?

केवढ्या मुद्दलाचा राशि–

२२. २४० दिवसांत ३$\frac{1}{8}$ दरानें पौं. ३४६. १३. ४ होईल?

२३. १६ जूनपासून ७ नवंबरपावेतों ५॥ दरानें रु. ५८२। होईल?

व्याजाचा दर काय असला तर—

२४. पौं. १७०. ६. ३ मुद्दलाचा राशि ३ वर्षांत १९० पौंड १५ शि. होईल ?

२५. रु. ३३३८५८४ मुद्दलाचा राशि ४॥ वर्षांत रक्कम ३८२८१८४ होईल ?

२६. रु. २३९८। चें व्याज रु. २२६।। होण्याला २ वर्षें १० महिने लागतील ?

२७. रु. ७५०६ चें व्याज रु. १५८७ होण्याला ५ वर्षें ७ म. २० दि. लागतील ?

२८. ६। वर्षांत मुद्दलाच्या $\frac{3}{8}$ व्याज आकारण्याला व्याजाचा दर काय असावा ?

२९. १६ वर्षे ८ महिन्यांत मुद्दलाचें $\frac{7}{8}$ व्याज आलें आहे. ह्या व्याजाचा दर सांगा.

३०. ७४३ पौं. १० शिलिंगांचें व्याज ८७ दिवसांनीं ७ पौं. १९ शि. ६ पे. आकारलें आहे. ह्या आकारणींत व्याजाचा दर काय घेतला ?

३१. ३४० पौं. १२ शि. ६ पेन्सांचा राशि दरसाल दरशेंकडा ४ दरानें ३८१ पौं. १० शि. होण्याला मुदत केवढी पाहिजे ?

३२. २$\frac{3}{4}$ दरानें १००० गिनींचें व्याज १०३ पौं. ९ शि. ४$\frac{1}{2}$ पे. येण्याला किती वर्षें, किती महिने मुदत लागेल ?

३३. ३॥। दरानें २२५१ रु. १२ आ. ह्यांची रास केवढ्या मुदतीनें २७२८ रु. ८ आ. होईल ?

३४. ७$\frac{1}{3}$ दरानें मुद्दलाचे १॥ पट राशि होण्याला मुदत केवढी लागेल ?

३५. १८७० ची १ ली जानेवारी ह्या दिवशीं एका गृहस्थानें ४८३५ पौं., ३$\frac{3}{8}$ दरानें कर्ज घेतले आहेत. ही रकम व्याज, मुद्दल मिळून ५००० पौं. होईल त्या दिवशीं परत करण्याची कबुलायत आहे; तर ती मुदत कधीं भरेल ?

३६. एका मुद्दलापासून दरसाल दरशेंकडा ३$\frac{1}{2}$ टक्यांच्या सरळ वाढीनें रु. ५०६७।।– होण्यास १० वर्षे लागलीं आहेत, तर त्यापासून रु. ७०३८।.।। राशि होण्यास किती वर्षें लागतील ?

३७. एकानें दुसऱ्याला दरसाल दरशेंकडा ३ टक्यांच्या दरानें कांहीं रकम कर्ज दिली, तिचे त्याला ७२ दिवसांनीं २९३ पौं. १२ शि. $\frac{1}{2}$ पेन्स मिळाले. ह्यावरून रकम केवढी होती ?

३८. वर्षाचे आरंभीं ३२७० रु. कांहीं दरानें कर्जीं दिले आहेत. तेथून ९ महिन्यांनीं ४००० रु. पूर्वींच्या दुप्पट दरानें कर्जीं दिले आहेत. वर्षाचे अंतीं ह्या दोन्ही रकमांचें व्याज १३१।।। रु. आकारत आहे. तर पहिल्या रकमेचा दर काय आहे ?

३९. ४ टक्यांच्या दरानें केवढ्या रकमेचें व्याज दररोज

१ आणा होईल ? आणि ३॥ टक्यांच्या दरानें केवढ्या रकमेचें व्याज दररोज १ रुपया होईल ?

४०. ५८१२५ रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज रु. ८७११॥।~ होतें, तर रु. २९०६२॥ चें १॥ वर्षांचें व्याज काय होईल ? व व्याजाचा दर काय असेल ?

४१. सरकारी खजिन्यांत भरणें असलेल्या ३५८७ पौं. १५ शिलिंगांच्या बिलांचें ४८ दिवसांचें व्याज दररोज दरशेंकडा $1\frac{1}{2}$ पे. प्रमाणें काय होईल ? तसेंच ह्या दरानें १८८८ व १८९५ सालीं व्याजाचा दर दरसाल दरशेंकडा काय पडेल ?

४२. केवढ्या मुद्दलाचा राशि $3\frac{1}{2}$ दरानें व १० वर्षांनीं पौं. ४२५. १९. $4\frac{3}{4}$ होईल ? आणि हा राशि आजपासून केवढ्या मुदतीनें पौं. ४५३. ११. ७ होईल ?

४३. दरसाल दरशेंकडा $3\frac{1}{2}$ दरानें २ वर्षांत २७५ रुपयांचें जितकें व्याज येईल तितकेंच व्याज $3\frac{1}{2}$ वर्षांत १८० रुपयांचें येण्यास दरसाल दरशेंकडा व्याजाचा दर काय असावा ?

४४. १६० रुपये मुद्दलाचें दरसाल दरशेंकडा ५ दरानें ३६ रुपये व्याज येण्यास जितकी मुदत लागेल, त्या मुदतीच्या $\frac{3}{4}$ मुदतींत सदरहू व्याजाच्या सवापट व्याज दरसाल दरशेंकडा ४ दरानें येण्यास मुद्दल किती पाहिजे ?

४५. ४ वर्षांत २३६ रुपयांची २७६ रुपये रास ज्या दरानें येईल त्याच दरानें २२० रुपयांचें २० रु. व्याज येण्यास मुद्दल किती ?

प्रश्नसमुदाय.

१. एक गृहस्थ कांहीं अंतरापर्यंत चालत जाऊन तेथून घोड्यावर बसून परत आला. त्यास निघालेल्या वेळापासून परत येण्यास ३॥। तास लागले. तो जर पूर्वीपासून घोड्यावर बसून जाऊन परत येता तर त्याला २॥ तासांत परत येतां आलें असतें. ह्यावरून तो पायांनीं चालत जाऊन तसाच परत येता तर त्यास किती वेळ लागता ?

२. $\frac{१८५४}{१०३१५}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्या; व १ पौंड १५ शिलिंग ६ पेन्स ह्यांस अपूर्णांकांत गिनीचें रूप द्या; अर्ध्या गिनीचे $\frac{३}{२८}$ ह्याची किंमत काढा; आणि $\frac{१}{३}$, $\frac{१०}{२१}$ चे $\frac{२}{५}$, $१\frac{२}{७}$, व $३ \div २\frac{२}{५}$ ह्यांची बेरीज करा.

३. माझ्याजवळ कमींत कमी किती गोट्या असल्या ह्मणजे त्यांचे मला बरोबर ४, ५, १२, किंवा १८ असे वांटे करितां येतील ?

४. मीं आपला ३०० रुपयांचा पदार्थ दुसऱ्यास तीन वर्षेंपर्यंत वापरावयास दिला; तर त्यानें त्याच्या मोबदला आपला २०० रुपयांचा पदार्थ मला किती दिवस वापरावयास द्यावा ?

५. एका बागेंत कांहीं झाडें होतीं, झाडांच्या संख्येच्या अडीचपट प्रत्येक झाडावर फळें आलीं आणि सर्व फळांची बेरीज १३५४२४० झाली. तर झाडें किती होतीं ?

६. एका शेतांत एके वर्षीं १५० खंडी गहूं झाला आणि तो ४८ रुपये खंडीप्रमाणें विकला; दुसऱ्या वर्षीं गव्हांचा दर उतरून ३६ रुपयांनीं खंडी झाला, परंतु त्या वर्षीं पीक चांगलें आल्यामुळें त्या शेताचें उत्पन्न मागल्या वर्षाइतकेंच झालें. तेव्हां त्या वर्षीं गहूं किती झाला तें सांगा.

७. ३ शेर चहाची किंमत ४ शेर काफीच्या किमतीबरोबर आहे, आणि ६ शेर काफीची किंमत २० शेर साखरेच्या किमतीबरोबर आहे, तेव्हां ९ शेर चहाबद्दल किती साखर येईल तें सांगा.

८. एक जमीन ५४ बिघे, ४ पांड, १५॥ चौ. काठ्या आहे, दुसरी ३९ बिघे, ९३।। चौ. काठ्या आहे, आणि तिसरी ५४॥ बिघे आहे. त्यांतून खडकाळ जमीन ११ बि $२\frac{३}{८}$ पांड वजा करून बाकीच्या जमिनीचे सारखे ६० भाग करणें आहेत, तर एकेका भागांत किती जमीन येईल ?

९. एका गृहस्थास ४ मुलगे होते. पहिल्यास त्याच्या इस्टेटीचा $\frac{१}{३}$, दुसऱ्यास $\frac{१}{४}$, तिसऱ्यास $\frac{१}{५}$ आणि चवथ्यास $\frac{१}{६}$ मिळा-

ला. तेव्हां पहिल्यापेक्षां तिसऱ्यास ३६ रु. कमी मिळालें. तर एकंदर इष्टेट किती ? व प्रत्येकास काय मिळालें ?

१०. १७ रु. ६ आ. यांचे $\frac{५}{८}$, ४॥ रु. चे ·५२७, आणि १५ आण्यांचे ·१२५, यांची बेरीज करून तिला रुपयाचें दशांशरूप द्या.

११. सेंटिग्रेड ह्मणून एका प्रकारचें उष्णतामापक यंत्र आहे. त्यांत पारा ० अंशावर असतो तेव्हां पाणी थिजतें, व १०० अंशांवर असतो तेव्हां पाण्यास कढ येतो; तसेंच फारेनहीट ह्मणून दुसऱ्या एका प्रकारचें उष्णतामापक यंत्र आहे, त्यांत पारा ३२ अंशांवर असतो तेव्हां पाणी थिजतें व २१२ अंशांवर असतो तेव्हां पाण्यास कढ येतो; तेव्हां फारेनहीटच्या ६८ अंशांवर पारा असेल तेव्हां सेंटिग्रेडचे किती अंश होतील ?

✓१२. अडीच रुपयांनीं मण ह्या भावानें दूध १५ मण घेतलें, त्यांत पाणी मिसळून तें मिश्र २ रुपयांनीं मण विकावयाचें आहे, तर पाणी किती मिसळावें तें सांगा.

१३. रुपयाचे $\frac{२}{९}$ ह्यांची पूर्णांकांत किंमत काढा; १३ आणे ८ पै ह्यांस रुपयाचें अपूर्णांकरूप द्या; आणि १ दिवस ६ घटका ह्यांच्या कितव्या अंशाबरोबर १ घटका ७$\frac{१}{२}$ पळें आहेत तें सांगा.

१४. $\dfrac{\frac{१}{२}-\frac{१}{३}}{\frac{१}{३}-\frac{१}{४}}$ चे $\dfrac{\frac{१}{४}-\frac{१}{५}}{\frac{१}{५}-\frac{१}{६}}$ चे $\dfrac{\frac{१}{६}-\frac{१}{७}}{\frac{१}{७}-\frac{१}{८}}$ } ह्यांस भागजाति अपूर्णांकाचें रूप द्या.

✓१५. अ १० दिवसांत जें काम करतो तेंच काम ब १३ दिवसांत करतो, तर तें काम दोघे मिळून करूं लागल्यास किती दिवसांत करतील ?

१६. घोडा, गाडी व सामान या सर्वांना मिळून ४५० रुपये पडतात. घोड्याच्या $\frac{४}{५}$ किंमत गाडीला व गाडीच्या $\frac{१}{६}$ किंमत सामानाला पडते. तर प्रत्येकाची किंमत काय ?

१७. $\frac{३८७२}{१२८०७}$; १७$\frac{५}{१२}$ + $\frac{४}{१५}$ + १४४$\frac{११}{२१}$; २$\frac{१३}{३५}$ − $\frac{१७}{२५}$; $\frac{३}{४}$ चे $\frac{६}{७}$ × $\frac{५}{१५}$ चे $\frac{११}{१८}$ चे $\frac{२१}{२३}$; आणि ६३४७ ÷ २$\frac{३}{४}$; ह्या सर्वांस अतिसंक्षेपरूपें द्या.

१८. अ, ब, क, ह्या तिघांनीं मिळून एक कुरण ६०$\frac{1}{2}$ रुपयांस घेतलें; त्यांत अनें ५ ह्मशी ४॥ महिने चारल्या, बनें ८ ह्मशी ५ महिने चारल्या, आणि कनें ९ ह्मशी ६॥ महिने चारल्या, तेव्हां प्रत्येकानें किती पैसा द्यावा तें सांगा.

१९. कांहीं एक काम अब ३ दिवसांत, अक ४ दिवसांत आणि बक ६ दिवसांत करितात. सर्व कामाची मजुरी ९ शि. आहे. तर प्रत्येकाची रोजची मजुरी किती ?

२०. ६० रुपये २ आणे ६ पै हे चौघांस $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ह्या प्रमाणांत वांटून द्या.

२१. १०३७ ह्या संख्येचे असे दोन भाग करा कीं त्यांचें गुणोत्तर ७·६२५ आणि ५·३७५ ह्या दोन संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांच्या गुणोत्तराबरोबर होईल.

२२. ७०० आणि ५०० अशा दोन रकमा एकाच वेळीं दर-साल दरशेंकडा अनुक्रमें ३$\frac{1}{2}$ व ५ व्याजानें कर्जाऊ काढल्या व कांहीं दिवसांनीं दोहोंची मिळून १२०९$\frac{9}{10}$ रुपये रास आणून दिली, तर मुदत किती ?

२३. एका हौदास पाणी येण्याचे दोन व पाणी जाण्याचा एक असे तीन नळ होते, त्यांत पाणी येणारे नळांपैकीं एकानें तो हौद ४० मिनिटांत भरतो, व दुसऱ्यानें ५० मिनिटांत भरतो, आणि पाणी जाण्याच्या नळानें २५ मिनिटांत रिकामा होतो. आतां हे तिन्ही नळ एकदम सोडले तर तो हौद भरावयास किती वेळ लागेल ?

२४. अशी एक संख्या आहे कीं जी $\frac{2}{3}$ चे $\frac{4}{5}$ चा १$\frac{1}{2}$ ह्यांनीं भागिली असतां भागाकार १ येतो, तर त्या संख्येचा वर्ग काय होईल ?

२५ एका गृहस्थानें एका व्यापाऱ्यापासून १२५ रुप-यांच्या ७५ शेळ्या विकत घेतल्या, व ती रक्कम त्यास एका वर्षाअंतीं द्यावयाची असा ठराव केला. नंतर लागल्याच त्या शेळ्या त्यानें दुसऱ्यास दर शेळीस २। रुपयेप्रमाणें विकल्या; तेव्हां ह्या व्यापारांत पहिल्या खरेदी करणारानें किती नफा

मिळविला? हिशेब करितांना व्याज दरशेंकडा दरसाल ५ रुपये धरावें.

२६. १५ हात लांब आणि ४ हात रुंद असा चर ६ मनुष्यें दररोज १२ तास काम करून ३ दिवसांत खणतात, तर २० हात लांब आणि ८ हात रुंद असा चर ८ मनुष्यें दररोज ८ तासप्रमाणें काम करून किती दिवसांत खणतील?

२७. एकानें दर बैलास २० व दर गाईस १५ याप्रमाणें ८० जनावरें १३६० रुपयांस विकलीं. तर बैल किती विकले व गाई किती विकल्या?

२८. वजनी १३ मण ७॥ शेर ह्यांस दशांशांत खंडीचें रूप द्या; १ आणा ५$\frac{1}{2}$ पै ह्यांचे $\frac{3}{7}$ ह्यांस अपूर्णांकांत रुपयांचें रूप द्या; आणि १००१ ह्यांस ३९०६२५ ह्यांनीं, १००१ ह्यांस ·०००३९०६२५ ह्यांनीं, व १०·०१ ह्यांस ३९०·६२५ ह्यांनीं भागा.

२९. सूर्य ३६५ दिवस ५ अवर ४८ मिनिटें इतक्या वेळांत ३६० अंश चालतो, तर तो एका दिवसांत किती कला* चालेल?

३०. १० पुरुष, १३ बायका आणि २५ मुलें ह्यांस १५ रुपये वांटून द्या, ते असे कीं पुरुषास बायकोच्या दुप्पट व मुलास बायकोच्या निंमे येतील.

३१. एक असा अपूर्णांक आहे कीं त्यास १$\frac{1}{2}$ च्या घनानें गुणून गुणाकार १$\frac{7}{9}$ च्या वर्गमूळानें भागला तर भागाकार $\frac{3}{8}$ येतो, तेव्हां तो अपूर्णांक कोणता हें सांगा.

३२. २ मेंढ्या व ३ शेळ्या यांची मिळून किंमत ३८ रु. आहे आणि ५ मेंढ्या व दोन शेळ्या यांची मिळून किंमत ५१ रुपये आहे, तर ११ मेंढ्या आणि ७ शेळ्या यांची मिळून किंमत किती होईल?

३३. २४ हात ४ तसू रुंद, आणि ९६ हात ६ तसू लांब अशा

---

* १ अंश = ६० कला आणि १ कला = ६० विकला.

जमिनींत मका पेरला आहे. व तो दरचौरस हातास ८~॥ आणा ह्या भावानें विकणें आहे, तर त्याची किंमत काय होईल?

३४. ३० चे $\frac{७}{८}$ चा $\frac{१}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ इतकीं मेंढरें २१० चे $\frac{३}{१६}$ चे $\frac{९}{१४}$ चे $\frac{८}{९}$ इतक्या रुपयांस विकलीं, तेव्हां प्रत्येक मेंढरास काय पडलें तें सांगा.

३५. एका गृहस्थाचें दिवाळें निघालें, तेव्हां त्याची जिंदगी विकली. तिचे २१००० रुपये आले, ते त्याच्या चार सावकारांस त्यांच्या कर्जाच्या प्रमाणानें वांटून देणें आहेत. तें असें कीं, कच्या कर्जास : खचें कर्ज : : २ : ३; खचे कर्जास : गचें कर्ज : : ४ : ५; आणि गचे कर्जास : घचें कर्ज : : ६ : ७; तेव्हां प्रत्येकाचे हिश्शास काय येईल तें सांगा.

३६. एक घनहात पाण्याचें वजन १०६ शेर भरलें; तर एक हात खोल, १६ हात ७ तसू लांब, आणि ८ हात ४ तसू रुंद, इतक्या पाण्याचें वजन किती होईल ?

३७. एका खाणीचें उत्पन्न दरसाल ३२९६ रुपये १३ आणे ५$\frac{१}{३}$ पै आहे. त्या खाणींत एकाचे १४ हिस्से आहेत त्यांजबद्दल १०२५ रुपये १२ आणे ७$\frac{१}{३}$ पै मिळाले. तेव्हां त्या खाणींत एकंदर किती हिस्से आहेत तें सांगा.

३८. अ ब या दोन स्थळांमध्यें अंतर १२० मैल आहे. दोन स्थळांहून दोन गृहस्थ परस्परांकडे येण्यास एकाच वेळीं निघाले ते दर तासास अनुक्रमें ६ व ८ मैल चालतात. तर निघाल्यापासून त्यांची भेट किती वेळानें होईल ?

३९. २० रुपयांनीं तोळाप्रमाणें शुद्ध सोन्यांत ८ आण्यांनीं तोळा ह्या दराचें हीन घालून ७॥ तोळे वजनाचा एक दागिना केला; त्यांत शुद्ध सोनें चोविसांस अठरा ह्या प्रमाणानें आहे, व बाकीचें हीन आहे, व तो दागिना करावयास मजुरी १०० तोळ्यांस २५ रुपयेप्रमाणें दिली, तेव्हां त्या दागिन्याची एकंदर किंमत काय होईल तें सांगा.

४०. जर एक मनुष्य एका तासांत ३०२$\frac{१}{२}$ चौरसगज जमि-

नीवरील गवत कापतो, तर २$\frac{७}{६}$ बिघे जमिनीवरील गवत कापावयास तीन मनुष्यांस किती तास लागतील?

४१. एक काम अ १२ दिवसांत आणि ब १६ दिवसांत करितो. दोघांचे मिळून कामावर दिवस १५ होऊन काम पुरें झालें, सर्व कामाबद्दल मजुरी ३ रु. १२ आ. मिळाली. तर प्रत्येकाच्या वांट्यास किती पैसा आला ?

४२. क १२ दिवसांत जें काम करतो, त्याच्या तिप्पट काम ख ८ दिवसांत करतो, आणि खच्या पांचपट काम ग १२ दिवसांत करतो, तर तेंच काम तिघे मिळून किती दिवसांत करतील ?

४३. कोणी व्यापाऱ्यानें आपल्या मालावर शेंकडा २० रुपयेप्रमाणें नफा ठेवून त्यांतील कांहीं माल २६ रुपयांस विकला, तेव्हां त्यांत मुद्दल किती व नफा किती ?

४४. चार आणि पांच यांच्यामध्यें अवरकांटा व मिनिटकांटा ह्यांत २० मिनिटांचें अंतर आहे; तेव्हां किती वाजले असावे ? एकदां अवरकांटा मिनिटकांट्याच्या पुढें व एकदां मागें अशीं याचीं दोन उत्तरें येतात तीं कोणतीं ?

४५. एक चौरस गज जमिनींत पावणेचार पायली धान्य पिकतें, तर २८ हात लांब व १४ हात रुंद अशा जमिनींत धान्य किती पिकेल ? ह्या जमिनीपैकीं कडेची चौफेर दोन दोन हात जमीन वांधाकडे गेली आहे.

४६. ३५ पौंडांमध्यें पौंडांच्या दुप्पट क्रौन, क्रौनांच्या दीडपट शिलींग आणि शिलिंगाच्या $\frac{४}{३}$ पट पेन्स याप्रमाणें नाणीं आणावयाचीं आहेत. तर प्रत्येक जातीचीं किती किती येतील ?

४७ एका अंशांत ६९$\frac{१}{२०}$ मैल असतात, तेव्हां त्यांचीं किती योजनें होतील ?

४८. एका खोलीचा घेर ३६ गज आहे; आणि उंची ५ गज ४ तसू आहे, तर तिच्या भिंतीं रंगविण्याबद्दल दर चौरस यार्डास १ शिलिंग १$\frac{१}{३}$ पेन्सप्रमाणें काय खर्च येईल ?

४९. औरसचौरस ३ तसूंचा, व १/८ तसू जाडीचा एक सोन्याचा पत्रा ठोकून ठोकून एक चौरस गज होईपर्यंत वाढविला, तर त्याची जाडी किती राहील ?

५०. २३७७ रुपये ४ आणे ९ पैचा ५७ खंडी खजूर अरबस्थानांतून मुंबईस आणला, त्याला जकात मुंबई बंदरांत शेंकडा १०१/३ रुपयेप्रमाणें दिली. तेव्हां दर खंडीस किती जकात पडली तें सांगा.

५१. दोन संख्यांचा ल० सा० भा० २८८ व दृढभा० २४ आहे. आणि एक संख्या ९६ आहे तर दुसरी संख्या कोणती ?

५२. रुपयाची तीन शेर या भावाची साखर आमच्याजवळ १ खंडी ३ मण आहे. ती देऊन त्या मोबदला रुपयाचा ७॥ शेर या भावाचा गूळ आह्मास घेणें आहे, तर तो किती मिळेल ?

५३. कोणीएक मनुष्य दररोज कर्नाटक प्रांतांतील १० कोस १२॥ तासांत चालतो, व तिकडील कोस पुणें प्रांताचे कोसांशीं २ : ३ ह्या प्रमाणांत आहेत, तेव्हां तो मनुष्य १३ दिवसांत पुणें प्रांताचे किती कोस चालेल तें सांगा.

५४. एका देवळाचा सभामंडप ३५ हात लांब आणि १५ हात रुंद आहे, त्याच्या छताच्या भोंवतालीं वेल पाऊण हात रुंदीचा बसविला त्यास १९४ रुपये पडले, तेव्हां दर चौरस गज वेलास काय पडलें तें सांगा.

५५. १/३ आण्याचे ७/१३ हे १/२ रुपयाचे काय आहेत ?

५६. एका गृहस्थानें एका सावकारापासून दरमहा द० शें० ४ प्रमाणें कांहीं व दरसाल द० शें० ६ दरानें कांहीं मिळून ३५० रु० कर्जी नेले. आणि दोन वर्षांच्या अखेर ३८६ रु० रास आणून दिली. तर प्रत्येक दराचे किती किती रुपये नेले होते ?

५७. लंडन शहर ज्या अक्षवृत्तावर आहे त्या अक्षवृत्ताचा घेर १५१२० मैल आहे; तेव्हां लंडन शहराचे दोन्ही बाजूंच्या एक अंशाच्या रेखावृत्तांमध्यें अंतर किती, व तेथून सूर्य आपल्या दृश्यमान गतीनें एका मिनिटांत किती मैल चालतो असें दिसेल ?

५८. ४०३३३ रुपये ३ आणे ३$\frac{3}{4}$ पै चौघांस वांटून द्या; तें असें कीं त्यांचे वांटे १, २, ३, ४ ह्या प्रमाणांत येतील.

५९. एका आगबोटीचा वेग दर तासास १५ मैल आहे. ती एका ठिकाणाहून निघून $\frac{2}{3}$ अंतर गेल्यावर तिचा वेग पूर्वींच्या वेगाच्या $\frac{2}{3}$ झाला. तिला नियमित स्थळीं पोहोंचण्यास ६ तास लागले. तर दोन ठिकाणांमधील अंतर किती?

६०. एका कुरणांतील गवत ७ बैल किंवा ५ ह्मशी ८७ दिवसांत खाऊन टाकतात, तर तें गवत २ ह्मशी व ३ बैल मिळून किती दिवसांत खातील ?

६१ ३६ रुपये ८ आणे ६ पै हे २१ पुरुष, २१ बायका आणि २१ मुलें ह्यांस वांटून दिले, असे कीं मुलाच्या दुप्पट बायकोस व बायको आणि मूल ह्यांचे बेरजेबरोबर पुरुषास, तेव्हां प्रत्येक पुरुष, प्रत्येक बायको आणि प्रत्येक मूल ह्यांस काय आलें तें सांगा.

६२. कोणी मनुष्यानें आपल्याजवळच्या साखरेपैकीं $\frac{1}{2}$ चे $\frac{3}{4}$ चे $\frac{7}{12}$ साखर दर शेरास ४ आणे ६ पै प्रमाणें विकली, व त्या विकलेल्या साखरेचें वजन ३ मण आणि १३ शेरांचे $\frac{3}{7}$ चा $\frac{1}{2}$ इतकें होतें; तेव्हां सर्व साखरेची किंमत काय ती सांगा.

६३. नदीच्या प्रवाहाच्या दिशेकडे जातांना होडीचा वेग दर तासास ५ मैल आहे. नदीमध्यें २० मैल जाऊन येण्यास १०$\frac{2}{3}$ तास लागले. तर नदीच्या पाण्याचा वेग किती?

६४. एका गाडीच्या चाकाचा व्यास एक गज आहे. तेव्हां एका मैलांत त्या चाकाचे किती फेरे होतील ? वर्तुलाचा व्यास आणि परिघ ह्यांचे गुणोत्तर ७ : २२ ह्यांच्या गुणोत्तराबरोबर आहे.

६५. एका हौदास पाणी येण्याचे दोन व पाणी जाण्याचा एक असे तीन नळ होते, त्यांत पाणी येण्याच्या नळांपैकीं एकानें तो हौद ४ घटकांत भरतो, व दुसऱ्यानें ५ घटकांत भरतो, आणि पाणी जाण्याच्या नळानें २$\frac{1}{2}$ घटिकांत रिकामा होतो, आता त्यांतील पहिला नळ सोडून २ घटका झाल्यावर दुसरा

नळ सोडला, व त्यास एक घटका झाल्यावर पाणी जाण्याचा नळ सोडला; तेव्हां तो हौद भरावयास किती वेळ लागेल ? व प्रत्येक नळांतून पाणी किती येईल तें सांगा. २६१ घागरींचा हौद आहे.

६६. $\frac{१५}{१६} - \frac{१४}{१७} + \frac{१३}{१४} - \frac{११}{१२}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्या; व रुपयाचे $\frac{३}{८}$, पावल्याचे $\frac{३}{१६}$ आणि ३ आणे ६ पै ह्यांचे $\frac{३}{१०}$. ह्यांची बेरीज करा.

√६७. मला एकजणाचे ७ शि. देणें आहेत; परंतु माझ्याजवळचें सर्व नाणें अर्धे गिनीचें आहे, आणि त्याच्याजवळचें सर्व नाणें क्रौनचें आहे. तर देणें फेडून टाकण्यास नाण्यांचा मोबदला कसा करावा ?

६८. मुंबई व पुणें यांत अंतर १२० मैल आहे. दोन ठिकाणांहून परस्परांकडे येण्यास आगीच्या गाड्या अनुक्रमें सकाळीं ६ व ७ वाजतां निघाल्या. त्या अनुक्रमें तासास १२ व २० मैल चालतात. तर त्यांची गांठ किती वाजतां पडेल ?

६९. पुढील अपूर्णांकास अतिसंक्षेपरूप द्या.

$$\frac{\dfrac{\frac{२}{३} + \text{३॥ चे } \frac{५}{६}}{\dfrac{२\frac{२}{७}}{९} + \dfrac{२\frac{१}{५}}{५\frac{१}{४}}} \times \dfrac{९४\frac{२}{९}}{१८०\frac{३}{५}} - \dfrac{२\text{'}१ \times (\text{·॥·} + \frac{१}{१४})}{१०००० \times \text{३॥·}}}{\dfrac{\text{१०=} - \text{·।।।· चा } \frac{१}{५}.}{७}}$$

७०. एका खोलीच्या भिंतीस आंतून वेलबुटीचे कागद चिकटवावयाचे आहेत. त्या खोलीचा घेर ३० फूट ७ इंच आहे आणि उंची १० फूट ६ इंच आहे, आणि कागदाची रुंदी १० इंच आहे. तेव्हां कागद किती लांब घ्यावा तें सांगा.

७१. एक मण कोळशास १३ आणे $७\frac{१}{४}$ पै प्रमाणें ३६ मण ४ शेर कोळशाची किंमत काय होईल ? व १३ रुपये ११ आणे ९ पै ह्यांचे $\frac{२}{३}$ चा $\frac{१}{७}$ आणि १० आण्याचे $\frac{१७}{१८} \times \frac{९}{१०}$ ह्यांत अंतर किती तें सांगा.

७२. कोणी मनुष्यानें आपला बाग दरसाल ९२० रुपयेप्रमाणें मक्त्यानें दिला, आणि मक्त्याबद्दल दोन वर्षांचा पैसा दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याजाप्रमाणें व्याज कापून देऊन आज घेते वेळेस त्यानें त्या कुळास बागेंतील घराचे डागडुजीबद्दल त्या सर्व पैशाचा $\frac{1}{8}$ व कोठाराचे डागडुजीबद्दल $\frac{1}{3}$ आणि किरकोळ खर्चाबद्दल २१८= ह्याप्रमाणें देऊन बाकी पैसा घेतला. तेव्हां त्यास काय मिळालें तें सांगा.

७३. एका खांबाचा $\frac{1}{6}$ बांधकामांत, $\frac{1}{8}$ चिखलांत, बाकीच्याचा $\frac{1}{3}$ पाण्यांत, आणि राहिलेला भाग पाण्यावर आहे. पाण्यावरील आणि चिखलांतील मिळून खांबाची लांबी ९ हात आहे. तर सर्व खांब किती हात आहे ?

७४. १९ फूट १० इंच लांब, १६ फूट १ इंच रुंद आणि १० फूट ३ इंच उंच, अशी एक खोली आहे. तिच्या भिंतीस सफेती देणें आहे. तर सफेतीबद्दल दर चौरस यार्डास ९ पै प्रमाणें खर्च किती लागेल तें सांगा.

७५. १६१८$\frac{1}{2}$ मैल हे अंशांत मांडा; एक अंशाबरोबर ६९$\frac{1}{10}$ मैल आहेत.

७६. आमच्या जवळचें घड्याळ आज बरोबर लाविलें तर उद्यां ३॥ मिनिटें पुढें जातें; तर आज दुपारीं बारा वाजतां त्याचे कांटे कसे ठेवावे ह्मणजे रात्रीचे १० वाजतां तें घड्याळ खरी वेळ दाखवील ?

७७. पुण्याहून आगीची गाडी मुंबईस जाण्याकरितां सकाळीं ६॥ वाजतां निघाली, ती दरतासास २० मैल प्रमाणें चालते. पुण्याहून दुसरी गाडी सकाळीं ८॥ वाजतां निघाली, आणि तिनें पहिले गाडीस मुंबईचे अलीकडे ६० मैलावर गांठलें; तेव्हां दुसरी गाडी किती वेगानें चालली होती ? मुंबईपासून पुण्यापर्यंत गाडीचे रस्त्यानें अंतर १८० मैल आहे.

७८. प्रत्येक शेत २५ हात लांब आणि १८ हात रुंद अशीं काटकोन चौकोनाकृति ७ शेतें २ मनुष्यें ३$\frac{1}{4}$ दिवसांत नांगरतात, तर १२॥। काठ्या लांब आणि ९ काठ्या रुंद अशीं

काटकोन चौकोनाकृति १३ शेतें ३७ मनुष्यें किती दिवसांत नांगरतील ?

७९. कांहीं एक काम ३ पुरुष अथवा ५ बायका अथवा ८ मुलें २$\frac{१}{३०}$ दिवस इतक्या वेळांत करतात, तर तेंच काम २ पुरुष, ३ बायका आणि ४ मुलें मिळून किती वेळांत करतील ?

८०. पुण्याहून ३१० मैल लांब एक गांव आहे. तेथें जाण्याकरतां आगीची गाडी दिवसास बारावर ३ तास ५१ मिनिटें झाल्यावर निघाली. ती पहिल्यानें दरतासांत २७ मैल प्रमाणें १२१ मैल गेली, पुढें दरतासांत ९॥ मैल प्रमाणें १२१ मैल गेली, आणि शेवटीं दरतासांत ८ मैल प्रमाणें ६८ मैल गेली. तेव्हां ती तेथें केव्हां जाऊन पोहोंचली ?

८१. ८६४ हात ३ तसू लांब आणि ६२ हात ६ तसू रुंद अशी एक जागा आहे, ती किती चौरस गज भरेल तें सांगा.

८२. कोणी एक गृहस्थ वाटेनें जात असतां त्यास अ आणि ब हे दोघे भिकारी भेटले; तेव्हां त्यांस कांहीं द्यावें असा विचार करून खिशांत हात घालून पाहतो तों एका मोहरेचे (ह्म० १५ रुपयांचे) $\frac{७७}{५४०}$ चे १०$\frac{५}{७}$ ÷ ७$\frac{१}{३}$ चे २$\frac{७}{११}$ ÷ ४$\frac{२}{७}$ आहेत असें त्यास आढळलें; तेव्हां त्यानें त्याचे $\frac{३}{४}$ चा $\frac{१}{७}$ अस दिला, बाकी राहिले त्याचे $\frac{३}{५}$ बस दिले; तेव्हां प्रत्येकास काय मिळालें तें सांगा

८३. अ आणि ब ह्या दोघांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला, त्यांत अनें पहिल्यानें २००० रुपये दिले, व पुढें आठ महिन्यांनीं १००० रुपये दिले; बनें आरंभीं १००० रुपये दिले; पुढें चार महिन्यांनीं ३०७० रुपये दिले; आणि पुढें ६ महिन्यांनीं १३०० रुपये माघारे घेतले. वर्षाअंतीं हिशेब पाहतात तों त्या व्यापारांत त्यांस १६३५ रुपये नफा झाला तो त्यांनीं कसा वांटून घ्यावा तें सांगा.

८४. अ आणि ब ह्या उभयतांनीं सर्कतीनें व्यापार आरंभिला. त्यांत बपेक्षां २५ रुपये १२ आणे अचे जास्त होते; पुढें हिशेब करून पैसा वांटून घेतला, तेव्हां अचे वांटणीस ६० रु-

पये आणि बचे वांटणीस २८ रुपये आले, तेव्हां आरंभीं प्रत्येकानें किती किती दिले तें सांगा.

८५. एक काम अ १४ दिवसांत करितो. त्यानें प्रथम ३॥ दिवस काम केलें. नंतर बाकीच्या कामाचे $\frac{3}{4}$ बनें केलें आणि राहिलेलें काम अ आणि क ह्यांनीं मिळून एका दिवसांत केलें. तर सर्व काम एकटा क किती दिवसांत करील ?

८६. १४४ रुपये १२ पुरुष आणि १८ बायका यांस वांटून द्या. इतकेंच कीं दरपुरुषास दरबाईच्या १॥ पट रुपये मिळावे.

८७. १५४० रुपये अ, ब, क आणि ड या चौघांस वांटून द्या; असे कीं, ते अला बचे दिढीनें मिळावे; बला कपेक्षां त्याच्यारच $\frac{1}{3}$ नें जास्त मिळावे; आणि कला डच्या सवाईनें मिळावे.

८८. कुत्र्याच्या पुढें ससा ३'५० हात आहे. ससा १॥ मिनिटांत ७'५ हात चालतो. असें असतां कुत्र्यानें त्यास ३'५ मिनिटांत गांठलें. तर कुत्रा दर मिनिटांत किती चालत होता ?

८९. ७७० रुपये अ, ब, क, ह्या तीन असामींस वांटून द्यावयाचे, ते असे कीं अला जर ४ तर बला ३, आणि अला जर ६ तर कला ७. तेव्हां प्रत्येकाच्या वांट्यास काय येईल तें सांगा.

९०. कोणी धनगरानें १४ मेंढरें ३९ पौंड ६ शिलिंग ५$\frac{1}{2}$ पेन्स ह्यांस घेतलीं, आणि त्यांतील सहा मेंढरें प्रत्येक मेंढरास १ पौंड १६ शिलिंग ह्याप्रमाणें विकलीं; परंतु त्याच्या मनांत ह्या सर्व व्यापारांत शेंकडा ४ पौंड नफा व्हावा असें आहे तेव्हां बाकीचीं मेंढरें काय किंमतीस विकावीं तें सांगा.

९१. एक चाकर वर्षाचें एक कडें व ६० रुपये देण्याच्या करारानें ठेविला आठ महिने नोकरी केल्यावर त्यास तें कडें व ३५ रुपये दिले. तर कड्याची किंमत काय ?

९२. दररोज ६ तासप्रमाणें काम करून १२ मनुष्यें १५ दिवसांत कांहीं एक काम संपवितात, तर तेंच काम दररोज १२$\frac{12}{13}$ तासप्रमाणें करून ८५$\frac{1}{2}$ दिवसांत संपविण्यास किती मनुष्यें लागतील ?

९३. एका मुद्दलाची सरळ व्याजानें ९ महिन्यांची रास १२४॥ रु. आहे आणि सव्वा वर्षाची रास १२७॥ रु. आहे. तर मुद्दल किती ?

९४. एका बागेंतील झाडांच्या $\frac{1}{3}$ आंब्यांचीं, आंब्याच्या $\frac{2}{5}$ केळींचीं, केळीच्या $\frac{3}{4}$ चे $\frac{2}{5}$ सुपारीचीं आणि बाकीचीं ७४ नारळीचीं होतीं. तर एकंदर झाडें किती होतीं ?

९५. दरमहा ३० रुपयेप्रमाणें ता० १६ फेब्रुआरी ते ता० १७ मार्चपर्यंतच्या नोकरीचा पगार किती होईल ?

९६. सन १८९६ तील ता० ८ फेब्रु० ते २२ मार्चपर्यंतचा पगार ६६० रुपये आहे. तर दरमहा किती ?

९७. कांहीं एक काम कांहीं मनुष्यें कांहीं दिवसांत करितात. त्यांच्या मदतीस ३ मनुष्यें दिलीं तर तें काम २४ दिवसांत संपतें; व ८ दिलीं तर १८ दिवसांत संपतें; तर तें काम प्रथम किती मनुष्यें किती दिवसांत करीत होतीं ?

९८. २ पैशांना ५ आंबे, ७ पैशांना ३ डाळिंबें व ४ पैशांना १० पेरू याप्रमाणें भाव आहे. तर १।=॥ मध्यें प्रत्येक जातीचीं सारखीं फळें किती येतील ?

९९. अजवळ आरंभीं २ पौंड १३ शिलिंग होते, व त्यास बनें आणखी १ पौंड ११ शिलिंग ६ पेन्स ह्यांचे $6\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2}$ दिले, तेव्हां त्याजपाशीं पैसा बच्या त्रेचाळीसपट झाला; ह्यावरून बजवळ आरंभीं किती पौंड होते तें सांगा.

१००. एका पौंडाची रास पांच वर्षांत सरळ व्याजानें एक गिनी करावयाची आहे, तर दरसाल दरशेंकडा व्याजाचा दर काय ठेवावा ?

१०१. जेव्हां गाडीचा रोजभाड्याचा दर १४ शिलिंग ८ पेन्स आहे, तेव्हां कोणी मनुष्य १६ पौंड घेऊन ११ पिंपें १८ मैल लांब नेतो, तर जेव्हां गाडीचा रोज-भाड्याचा दर १६ शिलिंग ६ पेन्सपर्यंत वाढेल, तेव्हां तींच पिंपें ७२ पौंड घेऊन किती लांब नेईल ?

१०२. कोणी कारखानदारानें ५० पुरुष आणि ३५ मुलें

इतकीं माणसें कामावर लावलीं, त्यांत पुरुषानें दररोज १२ व मुलानें दररोज ८ तास काम करावें असा ठराव होता, व त्याबद्दल दरतासास पुरुषास ६ पेन्स व मुलास २ पेन्स मिळत असत, व ह्याप्रमाणें दर आठवड्यांत ते ५$\frac{1}{2}$ दिवस काम करीत. तेव्हां वर्षाचे मजुरीचा आकार किती तें सांगा.

१०३. ३$\frac{1}{2}$ गिनी ६ असामींस वांटून द्या असे कीं ते विभाग १, २, ३, ४, ५, ६ ह्या संख्यांच्या प्रमाणांत येतील.

१०४. एका बागेंत कांहीं झाडें आहेत त्यांत शिताफळाचीं $\frac{1}{3}$, पेरूचीं $\frac{1}{6}$, रामफळाचीं $\frac{1}{4}$ व इतर प्रकारचीं ५० ह्याप्रमाणें आहेत, तेव्हां सर्व झाडें किती तें सांगा.

१०५. कोणी एकानें दरसाल दरशेंकडा ३$\frac{1}{2}$ रुपये व्याजानें कांहीं पैसा कर्ज काढून तो दरसाल दरशेंकडा ५ रुपयेप्रमाणें व्याजीं लावला, त्याबद्दल व्याज त्या सावकारास त्याला वर्षाच्या अखेरीस द्यावें लागे, परंतु कुळांकडून व्याज तो सहा सहा महिन्यांनीं घेत असे, आणि ह्याप्रमाणें तो वर्षास २०० रुपये मिळवी. तेव्हां त्यानें कर्ज किती काढलें होतें तें सांगा.

१०६ $\frac{721}{1117}$ ह्यांस अतिसंक्षेपरूप द्या; $\frac{162}{259}$ शेर ह्यांस मणाचें रूप द्या; २$\frac{3}{4}$, ३$\frac{7}{10}$, २$\frac{1}{5}$, १$\frac{7}{8}$ ह्यांची बेरीज करा; आणि १$\frac{2}{3}$ चे २$\frac{3}{5}$ ह्यांस ७$\frac{19}{24}$ चे १$\frac{2}{5}$ ह्यांनीं भागा.

१०७. मराठी चालीचे १५$\frac{1}{2}$ कोस इंग्रजी ३८$\frac{3}{4}$ मैलांबरोबर आहेत; तर ३२६$\frac{3}{7}$ इंग्रजी मैलांबरोबर मराठी कोस किती होतील तें सांगा.

१०८. एक रस्ता ९३७ हात ६ तसू लांब आणि ६ हात ८ तसू रुंद आहे. त्यास फरसबंदी करावयाची आहे, तेव्हां तीस दर चौरस गजास १ रुपया २ आणे प्रमाणें एकंदर खर्च किती लागेल?

१०९. एका रुपयाचे ७$\frac{11}{20}$ चे २$\frac{1}{5}$ चे ३$\frac{5}{8}$, एका आण्याचे ३$\frac{6}{9}$ चे ९$\frac{3}{7}$, आणि एका पैचे ४$\frac{1}{8}$ चे ८$\frac{1}{4}$ ह्यांची बेरीज करा; आणि तीस ३$\frac{1}{2}$ पैचे $\frac{3}{8}$ चे $\frac{5}{14}$ चे $\frac{11}{12}$ ह्यांनीं भागा.

११०. चांगली चांदी एक रुपयास १० मासे २$\frac{1}{8}$ गुंजा येते,

तर १० तोळे ३$\frac{1}{3}$ मासे वजनाचा चांदीचा एक तांब्या आहे. त्याची किंमत काय होईल?

१११ पुण्याहून मुंबईस दोन आगीच्या गाड्या, एक उतारूंची व एक मालाची, अशा एकदम जाऊन पोहोंचाव्या अशा बेतानें सोडावयाच्या आहेत. त्यांत उतारूंची गाडी एक अवरांत २४ मैल जाते, व मालगाडी ५० मिनिटांत १५ मैल जाते, तेव्हां उतारूंची गाडी बराबर दोन वाजतां निघाली, तर माल गाडी केव्हां निघाली पाहिजे ह्मणजे वाटेंत न भेटतां दोन्ही गाड्या तेथें एकदम पोहोंचतील? पुणें आणि मुंबई ह्यांच्यामध्यें अंतर १२० मैल आहे.

११२. ७३०० स्वारांच्या चार टोळ्या आहेत त्या अशा कीं पहिल्या टोळीचा $\frac{1}{2}$, दुसरीचे $\frac{2}{3}$, तिसरीचे $\frac{3}{4}$, आणि चौथीचे $\frac{4}{5}$, ह्या सर्वांत स्वार सारखे आहेत. तेव्हां प्रत्येक टोळींत स्वार किती तें सांगा?

सोडविलेले प्रश्न.

अंकगणित भाग १ मध्यें कलम १७२, पृष्ठ १२८ मध्यें उदाहरण कसें करावें ह्मणून सूचना केल्या आहेत. त्या विद्यार्थ्यांनीं पुनः वाचून पहाव्या. पुढें कांहीं उदाहरणें सोडून दाखविलीं आहेत. त्यांवरून प्रश्नांत दिलेल्या प्रतिज्ञांच्या अनुरोधानें उत्तर काढण्याकरितां निरनिराळ्या प्रसंगीं कशा युक्ति योजाव्या लागतात हें चांगलें लक्षांत येईल.

बीजगणित ज्यांस येत नाहीं त्यांनीं अशा जातीचे प्रश्न सोडविण्याच्या रीतींची माहिती अवश्य करून घ्यावी; म्हणजे नानाप्रकारच्या चमत्कारिक प्रश्नांचा खुलासा करण्याची शक्ति त्यांचे अंगांत सहज येईल, आणि त्यांस फार आनंद वाटेल.

मुक्कामसेम 'पाछापाचें हैस्कूल' यांतील अ. मास्तर राजश्री श्रीनिवास अप्पा यांनीं अंकगणितांतील सोडविलेले प्रश्न या नांवाचें एक पुस्तक छापिलें आहे, त्यांतून विद्यार्थ्यांकरितां हीं कित्येक उदाहरणें निवडून घेतलीं आहेत,

१ प्रश्न. एका श्रीमंत गृहस्थानें मरणकालीं आपले पुत्रास आपले इस्टेटीचे $\frac{१३}{२०}$ आणि कन्येस बाकी राहिलेली इस्टेट अशी वांटून दिली. मुलाला मुलीपेक्षां २१,००० रुपये जास्त मिळाले. तेव्हां त्या गृहस्थाची सर्व इस्टेट किती होती?

खुलासा. $\frac{१३}{२०}$ मुलाचे वांटणीचे; तेव्हां $\frac{७}{२०}$ मुलीच्या वांटणीस आले. मुलाला मुलीपेक्षां $\frac{६}{२०}$ अधिक मिळाले, आणि हे २१००० रुपये आहेत ह्मणून

$$\text{इस्टेटीचे } \frac{६}{२०} = २१००० \text{ रु.}$$

ह्मणजे
$$\frac{\text{इस्टेट} \times ६}{२०} = २१००० \text{ रु.}$$

भाजक सोडविल्यानें (ह्मणजे स. प्र. ४ प्रमाणें एकीकडचा भाजक दुसरीकडे गुणक केल्यानें)

$$\text{इस्टेट} \times ६ = २१००० \text{ रु} \times २०$$

गुणक सोडविल्यानें (स. प्र. ५ प्रमाणें, एकीकडचा गुणक दुसरीकडे भाजक केल्यानें)

$$\text{इस्टेट} = \frac{२१००० \text{ रु.} \times २०}{६}$$
$$= ७०००० \text{ रु. हें उत्तर.}$$

टीप–गुणक भाजक सोडविण्याचे नियम वरतीं कंसांत दिले आहेत, ते तेथील प्रत्यक्षप्रमाणांचे आधारानें कसे सिद्ध होतात तें विद्यार्थ्यांनीं गुरूपासून समजून घ्यावें. गुणक भाजक मोठाले असले, अनेक असले, किंवा मोघम असले, ह्मणजे तेथें ह्या नियमांची गरज लागते ह्मणून ते येथें दिले आहेत वस्तुतः पाहतां सोप्या उदाहरणांत ह्या नियमांचे उपयोग सहज गतीनें आपण करीत असतों इतके हे नियम वहिवाटींतले आहेत. ह्मणून सहज कळण्यासारख्या स्थळीं ह्या नियमांचा उल्लेख कोणी करीत नाहीं. वरील प्रकारच्या स्थळीं मात्र करितात.

२ प्रश्न. एका गृहस्थाला पूर्वी आपल्या उत्पन्नावर दर पौंडास ४ पेन्सप्रमाणें इन्कमटाक्स द्यावा लागत असे. पुढें त्याचें

उत्पन्न २४० पौंड जास्त झालें, आणि इन्कमटाक्सही एका पौंडास ७ पेन्स याप्रमाणें झाला. पूर्वीपेक्षां त्याला आतां इन्कमटाक्साबद्दल ६० पौंड अधिक द्यावे लागतात, तर त्याचें पूर्वीचें आणि हल्लींचें उत्पन्न काय काय असावें ?

खुलासा. पूर्वीपेक्षां आतांचें उत्पन्न २४० पौंड अधिक आहे; सबब त्याबद्दल त्याला २४० × ७ पेन्स = १६८० पेन्स = ७ पौं. इतका इन्कमटाक्स जास्त द्यावा लागतो.

परंतु पूर्वीपेक्षां इन्कमटाक्साबद्दल ६० पौंड जास्त द्यावे लागतात. ह्यांत वर आलेले ७ पौंड वजा दिले ह्मणजे बाकी ५३ पौंड राहतात, हें पूर्वीच्या उत्पन्नावर इन्कमटाक्स जास्त झाल्यानें द्यावे लागतात, हें स्पष्ट आहे.

पूर्वीपेक्षां इन्कमटाक्स दर पौंडास ३ पेन्स जास्त बसला आहे; ५३ पौंड = १२७२० पेन्स ह्मणून १२७२० ÷ ३ = ४२४० पौंड हें पूर्वीचें उत्पन्न झालें, आणि ४२४० पौंड + २४० पौंड = ४४८० पौंड हें मागील उत्पन्न झालें. ह्मणून

४२४० हें एक उत्तर.
४४८० हें दुसरें उत्तर.

३ प्रश्न. एका गृहस्थाजवळ कांहीं पैसा होता. तो दर वर्षास तो सवाईनें वाढवीत असे. ह्याप्रमाणें चार वर्षें लोटल्यावर पाहतो तों त्यास असें समजलें कीं, ही जमाविलेली रक्कम जर शेंकडा ५ रु. प्रमाणें व्याजानें ठेविली तर आपणास एक वर्षाचें व्याजाचे ३७५ रुपये येतील. तर त्याच्याजवळ पाहिला पैसा किती असावा ?

खुलासा. दरसाल दरशेंकडा ५ रु. प्रमाणें त्यास व्याजाचे ३७५ रु. येतील इतका पैसा त्याच्याजवळ ४ थे वर्षाचे शेवटीं जमला, ह्मणजे ३७५ × १०० ÷ ५ = ७५०० रु. इतका जमला.

हा पैसा मुद्दलाची ४ वेळ सवाई होऊन वाढलेला आहे. ह्मणून मुद्दलाचे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ चे $\frac{५}{४}$ = ७५०० रु. गुणक सोडाविल्यानें

मुद्दल = ७५०० रु. × $\frac{२५६}{६२५}$ = ३०७२ रु. हें उत्तर.

४ प्रश्न. एका गंध्याच्या दुकानीं दोन प्रकारचें गुलाबी अत्तर होतें; एक २॥। रु. तोळा भावाचें आणि दुसरें १॥। रु. तोळा भावाचें. तीं अत्तरें त्यानें मिश्र करून २ रु. तोळा याप्रमाणें विकलीं तर दर तोळ्यास प्रत्येकीं नफातोटा काय काय होईल? आणि अशा प्रकारचा तोटा होऊं नये अशी जर त्याची इच्छा असेल तर त्यानें त्यांचें मिश्रण कोणत्या प्रमाणानें करावें.

खुलासा. पहिले प्रकारचे अत्तरांत त्यास दर तोळ्यास ·॥। रुपया तोटा होईल, आणि दुसरे प्रकारचे अत्तरांत त्यास दर तोळ्यास ·।· नफा होईल; ह्मणून त्यानें पहिल्या प्रकारचें अत्तर एक तोळा घेऊन त्यांत दुसऱ्या प्रकारचें अत्तर तीन तोळे मिळवावे ह्मणजे नफ्यातोट्याची बरोबरी होईल हें उत्तर.

५ प्रश्न. एका गवळ्यानें ७२ शेर दूध विकत दिलें, त्यांत ११ भाग दूध आणि १ भाग पाणी असें मिश्रण होतें. त्यांत आणखी किती पाणी घातलें ह्मणजे ९ भाग दूध आणि १ भाग पाणी असें मिश्रण होईल?

खुलासा. उदाहरणाप्रमाणें पाहतां

	१२ भाग = ७२ शेर मिश्रण.
तर	१ भाग = ६ शेर पाणी.
आणि	११ भाग = ६६ शेर दूध.

आतां दूध तितकेंच ठेवून त्यांत आणखी पाणी मिश्रित करून मिश्रणांत ९ भाग दुधास १ भाग पाणी झालें पाहिजे, ह्मणून

भाग. भाग. शेर. शेर.

$९ : १ :: ६६ : ७\frac{१}{३}$

यावरून ६६ शेर दुधांत $७\frac{१}{३}$ शेर पाणी घातलें पाहिजे. या $७\frac{१}{३}$ शेर पाण्यांत पूर्वींचे ६ शेर पाणी आहेच; ह्मणून त्यांत आणखी $१\frac{१}{३}$ शेर पाणी घातलें ह्मणजे इच्छिले प्रमाणाचें मिश्रण होईल.

६ प्रश्न. सोनें व रुपें मिळून गठडी एकाजवळ वजनांत ९ पौंड होती. तिची एकंदर किंमत ३१८ पौं. १३ शि. ६ पे. होती. ह्या गठडींत सोन्याइतकें रुपें आणि रुप्याइतकें सोनें

अशीं जर तीं उलट प्रमाणानें वजनांत असतीं तर तिची एकंदर किंमत १२९ पौं. १० शि. ६ पे. होती. १ औंस सोनें व २ औंस रुपें मिळून किंमत ४ पौं. ८ शि. १॥ पे. झाली असती, तर एक औंस सोनें व एक औंस रुपें यांची वेगळाली किंमत काय काय असती ?

खुलासा. पहिली गठडी व दुसरी गठडी ह्या एकत्र केल्या तर ९ पौंड सोनें व ९ पौंड रुपें अशीं होतील व त्यांची किंमत ३१८ पौं. १३ शि. ६ पे. + १२९ पौं. १० शि. ६ पे. = ४४८ पौं. ४ शि. होईल.

∴ ९ पौं. सो. + ९ पौं. रु. = ४४८ पौंड. ४ शि.
व १ पौं. सो. + १ पौं. रु. = ४९ पौंड. १६ शि-
१२ नीं भागून, १ औं. सो. + १ औं. रु. = ४ पौं. ३ शि.
उदाहरणाप्रमाणें, १ औं. सो. + २ औं. रु. = ४ पौं. ८ शि. १॥ पे.
वजाबाकीनें, १ औंस रु. = ५ शि. १॥. पे.

ही किंमत वरच्या कोणत्याही बरोबरींत ठेवावी ह्मणजे येतें कीं,
१ औंस सोनें = ३ पौं. १७ शि. १० पे. हें उत्तर.

७ प्रश्न. एक काम अ मनुष्य एकटा २७ दिवसांत संपवितो, तितकेंच काम करण्यास दुसऱ्या ब मनुष्यास १५ दिवस लागतात. आतां त्या कामावर अ मनुष्य १२ दिवस खपला, नंतर दुसरा ब मनुष्य ५ दिवस खपला, आणि मग तिसऱ्या एका क मनुष्यानें तें काम ४ दिवसांत संपविलें, तर एकटच्या कनें सर्व काम पहिल्यापासून शेवटपर्यंत किती दिवसांत संपविलें असतें ?

खुलासा. सर्व काम २७ × १५ = ४०५ धरिलें तर,
अचें रोजचें काम = १५ येतात.
बचें रोजचें काम = २७ येतात.
अचें १२ दि. काम = १२×१५=१८० येतात.
बचें ५ दि. काम = ५×२७=१३५ येतात.
व दोघां मिळून काम = ३१५ येतात.
सर्व काम = ४०५ धरिलें आहे.

∴ कचें ४ दिवसांचें काम = ९० येतात.
व कचें रोजचें काम = २२॥ येतात.
∴ सर्व एकट्या कनें करण्यास = $\frac{४०५}{२२॥}$ = १८ दिवस लागतील हें उत्तर.

८ प्रश्न. कचे रोजचे कामाचे अर्धाइतकें अचें काम होत असे. ह्या दोघां मिळून कांहीं एक काम १० दिवसांत पुरें केलें, परंतु अ जाऊन त्याच्याबद्दल, जर ब काम करावयास आला असता, तर ते दोघे मिळून तेंच काम ५ दिवसांत पुरें करिते. ह्यावरून अ आणि ब हे त्या कामावर ५ दिवस असते, आणि राहिलेलें काम एकट्या कला संपवावें लागतें, तर त्यास किती दिवस लागते? तसेंच अ, ब, आणि क यांच्या दररोज कामें करण्याच्या शक्ति कशा कशा होत्या?

खुलासा. सर्व काम ३ × १० × ५ = १५० धरिलें,
तर अ + क ह्या दोघांचें रोजचें काम = $\frac{१५०}{१०}$ = १५ येतात.
परंतु क, हा अचे दुप्पट काम करतो; ह्मणून, अ आणि क या दोघां मिळून अचे ३ पट काम होतें. ह्मणून,
अचें रोजचें काम = $\frac{१५}{३}$ = ५ येतात.
आणि कचें रोजचें काम = १० येतात.

आतां ब आणि क हे दोघे तेंच काम ५ दिवसांत संपवितात. म्हणून,
ब + क यांचें रोजचें काम = $\frac{१५०}{५}$ = ३० येतात.

परंतु कचें रोजचें काम १० आहे, ह्मणून बचें रोजचें काम २० येतें. तसेंच अ, ब, क यांचीं रोजचीं कामें ५, २०, १० ह्मणजे १, ४, २ या प्रमाणानें येतात.
अ + ब मिळून दररोज ५ + २० = २५ काम करितात.
∴ अ + ब हे पांच दिवसांत ५ × २५ = १२५ काम करतात.
सर्व काम = १५०
शिल्लक काम = २५
तें एकट्या कला संपवावयास $\frac{२५}{१०}$ = २॥ दिवस लागतील हें उत्तर.

९ प्रश्न. एका ठिकाणाहून दोन गृहस्थ एकाच वेळीं बाहेर पडून विरुद्ध दिशांनीं चालते झाले, ह्मणून त्यांच्यामध्यें २ तासांनीं ४० मैलांचें अंतर पडलें; ते जर एकाच दिशेनें एकाच रस्त्यानें चालले असते, तर त्यांच्यांत १॥ तासांत ९ मैल अंतर पडलें असतें. तेव्हां प्रत्येकाची दर तासांत किती किती चाल होती तें सांगा.

खुलासा. विरुद्ध दिशांनीं गेले तेव्हां दोघांत २ तासांनीं ४० मैल अंतर पडलें, तर एक तासांत २० मैल अंतर पडेल.

एकाच दिशेनें चालले असते तर १॥ तासांत ९ मैल अंतर पडतें, तेव्हां १ तासांत ६ मैल अंतर पडलें असतें.

अ जलद चालणारा आहे असें मानिलें, तर तो एक तासांत **ब**पेक्षां ६ मैल अधिक जातो असें होतें; ह्मणून,

ते विरुद्ध दिशांस जातात तेव्हां अ हा बच्या इतकें दुसऱ्या दिशेस चालून शिवाय एका तासांत ६ मैल पुढें जातो, आणि दोघांत २० मैलांचें अंतर पडतें; ह्मणून,

२० − ६ = १४ हा बच्या चालीची दुप्पट झाली; ह्मणून ब हा एका तासांत ७ मैल चालला; आणि अ हा त्यापेक्षां ६ मैल अधिक म्हणजे एका तासांत १३ मैल चालला, हें उत्तर.

१० प्रश्न २४०० रुपये अ, ब आणि क या तिघांत वांटून देण्याचे आहेत. ते असे कीं; कला. अ आणि ब ह्यांच्या बेरजेइतके रुपये मिळावे; आणि अला, ब आणि क ह्यांच्या बेरजेच्या अर्धाइतके मिळावे, तर एकेकाचे वांटणीस किती किती रुपये येतील?

खुलासा. उदाहरणाप्रमाणें पाहतां,

अचे रु. + बचे रु. = कचे रु.

प्रत्येकींत कचे रु. मिळविले तर,

अचे रु. + बचे रु. + कचे रु. = २ कचे रु.

तसेंच बचे रु. + कचे रु. = २ अचे रु.

प्रत्येकींत अचे रुपये मिळविले तर,

अचे रु. + बचे रु. + कचे रु. = ३ अचे रु.

यावरून असें स्पष्ट होतें कीं,

२ कचे रु. = ३ अचे रु. आहेत.

२ आणि ३ यांचा साधारण गुणाकार ६ आहे, तर एकंदर रकमेंत अ आणि ब यांचे मिळून ६ भाग धरिले तर कच्या वांटणीस ६ भाग येऊन एकंदर १२ भाग होतील. त्यांत अच्या वांटणीस ४ भाग, बच्या वांटणीस २ भाग, आणि कच्या वांटणीस ६ भाग, असे एकंदर १२ भाग येतील; परंतु एकंदर रकम २४०० रुपये आहे; म्हणून एका भागाच्या वांटणीस $\frac{२४००}{१२}$ रु. = २०० रु. आले. म्हणून,

अचे वांटणीचे ४ भाग = ४ × २०० रु. = ८०० रु.
बचे — — २ भाग = २ × २०० रु. = ४०० रु.
कचे — — ६ भाग = ६ × २०० रु. = १२०० रु.

एकंदर २४०० रु.
हें उत्तर.

२ री रीति.

कला अ आणि ब ह्यांच्या बेरजेइतके रुपये मिळावयाचे आहेत ह्मणजे कला १ मिळाला तर अ आणि ब ह्यांस दोघे मिळून १ रुपयाच मिळावयाचा आहे. तेव्हां २ रुपये वांटावयाचे असल्यास कला १ मिळेल व अ आणि ब मिळून १ मिळेल. येथें २४०० रु. वांटावयाचे आहेत.

∴ २ : २४०० :: १ : १२००

ह्मणजे कला १२०० रु. हें उत्तर.

आतां अला ब आणि क ह्यांच्या बेरजेचे अर्धा इतके मिळावयाचे आहेत. ह्मणजे ब आणि क ह्यांस मिळून २ रु. मिळाले तर अला १ रु. मिळावयाचा आहे. ह्मणजे तिघांचे मिळून ३ होतात पण तिघांचे २४०० आहेत.

∴ ३ : २४०० :: १ : ८००.

ह्मणजे अला ८०० रु. हें उत्तर.

आतां कला १२०० व अला ८०० मिळून २००० रुपये

वांटले. बाकी राहिले २४०० रु.– २००० रु. = ४०० रु. ही बची वांटणी आली. ह्मणून,

अची वांटणी	८०० रु.	}	हें उत्तर.
बची ,,	४०० रु.		
कची ,,	१२०० रु.		

११ प्रश्न. एका गृहस्थानें आपली ५८५०० रुपयांची मालमत्ता आपली बायको, तीन मुलगे, आणि चार मुली यांस वांटून दिली ती अशी. २ मुलग्यांचे वांटणीस ३ मुलींच्या वांटणीइतके रुपये आले; आणि त्याच्या बायकोच्या वांटणीस एक मुलगा आणि एक मुलगी यांच्या वांटणीच्या बेरजेच्या अर्धाइतके रुपये आले; तर प्रत्येकाच्या वांटणीस काय आलें ?

खुलासा. ३ आणि २ यांचा साधारण गुणाकार ६ आहे, ह्मणून दरएक मुलाची वांटणी ६ भाग समजा.

२ मुलगे म्हणजे १२ भाग हे तीन मुलींच्या भागांबरोबर आहेत; म्हणून प्रत्येक मुलीच्या वांटणीस ४ भाग येतील.

एक मुलगा आणि एक मुलगी ह्मणजे ६ + ४ = १० भाग, यांच्या अर्धाबरोबर त्याच्या बायकोच्या वांटणीस ५ भाग येतील.

ह्मणून एक बायको ह्मणजे ५ भाग, तीन मुलगे म्हणजे ३ × ६ भा. = १८ भाग, आणि चार मुली ह्मणजे ४ × ४ भा. = १६ भाग असे एकंदर ५ भा. + १८ भा. + १६ भा. = ३९ भाग इतकी सर्व मालमत्ता झाली. परंतु सर्व मालमत्ता ५८५०० रुपयांची आहे. म्हणून,

$$३९ \text{ भाग} = ५८५०० \text{ रु.}$$

व
$$१ \text{ भाग} = \frac{५८५०० \text{रु.}}{३९} = १५०० \text{ रु.}$$

∴ उत्तरें. { बायकोच्या वांटणीचे ५ भाग = ५×१५००रु. = ७५००
प्रत्येक मुलाचे वां॰चे ६ भाग = ६×१५००रु. = ९०००
प्रत्येक मुलीचे वां॰चे ४ भाग = ४×१५००रु. = ६०००

१२ प्रश्न. एक काम ८५० यार्ड लांब २४ दिवसांत पुरें करण्याचें आहे. त्या कामावर १८ मनुष्यें ११ दिवस खपलीं

आणि त्यांनीं ३३० यार्ड काम मात्र पुरें केलें. बाकीं राहिलेलें काम मुद्दतींत संपण्यास कामावर अधिक किती मनुष्यें लावावीं लागतील ?

खुलासा. अकरा दिवसांत ३३० यार्ड काम १८ मनुष्यांनीं केलें आणि बाकी काम ५२० यार्ड आहे, व मुद्दतीचे दिवस १३ आहेत, ह्मणून

व्यस्त. ११ दि : १३ दि. }
सम. ३३० यार्ड : ५२० यार्ड } : : १८ म : २४ मनुष्यें.

पैकीं १८ पूर्वींचीं आहेत म्हणून, २४ ह्यांतून १८ वजा जातां ६ राहतात. हीं नवीं माणसें लावावीं हें उत्तर.

१३ प्रश्न. एक ससा आपल्या ८० उड्या कुत्र्याच्या पुढें आहे. त्याच्या मागें जो कुत्रा लागला आहे त्याच्या दोन उड्या जितक्या वेळांत होतात, तितक्या वेळांत सशाच्या तीन होतात; परंतु ससा जितकी जागा दोन उड्यांत घेतो, तितकीच कुत्रा एका उडींत घेतो, तर सशाच्या कितव्या उडीला त्यास कुत्रा गांठील तें सांगा.

खुलासा. सशाच्या दोन उड्यांइतकी कुत्र्याची एक उडी लांब आहे, आणि सशाच्या तीन उड्यांच्या वेळांत कुत्रा दोन उड्या मारितो, ह्मणजे सशाच्या चार उड्यांइतकी जागा घेतो, म्हणजे सशाच्या तीन उड्यांत कुत्रा त्यास त्याच्या एका उडी-इतकें आटोपतो असें ह्मटलें पाहिजे. अर्थात् ससा आपल्या ८० उड्या कुत्र्याच्या पुढें आहे, तितकें अंतर नाहींसें करण्यास सशाला ८० × ३ = २४० उड्या माराव्या लागतील; म्हणजे सशाच्या २४० वे उडीस त्याला कुत्रा येऊन गांठील हें उत्तर.

१४ प्रश्न. एका मनुष्यानें ६००० रुपयांना ४०० जनावरें विकत घेतलीं. त्यांत कांहीं बैल व कांहीं शेळ्या होत्या. प्रत्येक बैलाला ५० रुपये, आणि प्रत्येक शेळीला १० रुपये, असे पडले; तर त्यानें प्रत्येक जातीचीं जनावरें किती किती विकत घेतलीं तें सांगा.

खुलासा. जर सर्वच बैल विकत घेतले असते, तर ६००० रुपयांत $\frac{६०००}{५०}$ = १२० बैल विकत आले असते; परंतु एक बैल कमी करून त्या ठिकाणीं ५ शेळ्या घातल्या असत्या, तर एकंदर किंमत तितकीच राहून एकंदर जनावरांची संख्या मात्र ४ नीं वाढली असती.

परंतु आपल्यास १२० बैलांचीं ४०० जनावरें करावयाचीं आहेत आणि एकंदर किंमत तितकीच राखण्याची आहे; ह्मणजे ४००−१२० = २८० जनावरें वाढविणें आहे.

परंतु एक बैल कमी करून ५ शेळ्या घेतल्या ह्मणजे एकंदरींत ४ जनावरें वाढतात, तर २८० जनावरें वाढविण्यास $\frac{२८०}{४}$ = ७० बैल कमी केले पाहिजेत, आणि त्या मोबदला ७० × ५ = ३५० शेळ्या घातल्या पाहिजेत.

अर्थात् १२० बैलांतून ७० बैल कमी केले ह्मणजे ५० बैल राहतात, आणि त्यांबद्दल ३५० शेळ्या आल्या ह्मणजे ३५० शेळ्या + ५० बैल = ४०० एकंदर जनावरें होतात; ह्मणून,

उत्तर ५० बैल व ३५० शेळ्या इतकीं जनावरें विकत घेतलीं.

१५ प्रश्न. ६०० पुरुष आणि २३१० पोरें ६५ दिवसांत जितकें काम करितात तितकेंच काम ५२० पुरुष व ११७० पोरें यांच्या हातून १०७ दिवसांत होत आहे; तर असें दाखवा कीं एका वेळांत दोन पुरुषांइतकें काम तीन पोरें करूं शकतात.

खुलासा. दिलेले पुरुष व पोरें यांचें काम ६५ दिवसांत ६५ पट होईल व १०७ दिवसांत १०७ पट होईल ह्मणून,

६५×६००पु. + ६५×२३१०पो. = १०७×५२०पु. + १०७×११७०पो.

ह्मणजे. ३९००० पु. + १५०१५०पो. = ५५६४० पु. + १२५१९०पो.

∴ १५०१५०पो. − १२५१९०पो. = ५५६४० पु. − ३९००० पु.

∴ २४९६०पो. = १६६४० पु.

८३२० नीं भा. ∴ ३ पो. = २ पु. हें उत्तर.

अथवा ६५ आणि १०७ यांचा साधारण गुणाकार ६९५५ आहे; व आपण एकंदर काम तितकें आहे असें मानिलें तर,

६०० पुरुष + २३१० पोरें हीं १ दिवसांत $\frac{६९५५}{६५}$ = १०७ काम करतील.

५२० पुरुष + ११७० पोरें हीं १ दिवसांत $\frac{६९५५}{१०७}$ = ६५ काम करतील.

वरील रकमेस १३ नीं गुणिलें आणि खालचे रकमेस १५ नीं गुणिलें तर,

७८०० पुरुष + ३००३० पोरें १ दिवसांत १०७ × १३ = १३९१ काम करतील.

७८०० पुरुष + १७५५० पोरें १ दिवसांत ६५ × १५ = ९७५ काम करतील.

वरील रकमेंत खालची रकम वजा केली ह्मणजे १२४८० पोरें १ दिवसांत ४१६ काम करतील. ह्मणून,

१२४८ पोरें १ दि. ४१·६ काम करतील ह्मणून ११७० पोरें १ दिवसांत ३९·० काम करतील; परंतु ५२० पुरुष + ११७० पोरें १ दिवस ६५ काम करतात, ह्मणून त्यांतील ११७० पोरांचें काम वजा दिलें ह्मणजे—

५२० पुरुष एका दिवसांत २६ काम करितात असें झालें. ह्मणून १ काम करण्यास २० पुरुष लागतात असें दिसतें.

परंतु एका दिवसांत ११७० पोरें ३९ काम करितात ह्मणून एक काम करावयास पोरें ३० लागतात असेंही दिसतें.

सारांश २० पुरुषांचें काम ३० पोरें करितात ह्मणजे २ पुरुषांचें काम ३ पोरें करितात हें उत्तर झालें.

१६ प्रश्न. एका गृहस्थाजवळ दोन घोडे आणि एक उत्तम प्रकारचें ५०० रुपये किमतीचें जीन असे तीन पदार्थ होते. हें जीन जर एका घोड्यावर घातलें तर त्यासुद्धां त्याची किंमत दुसऱ्या घोड्याच्या दुप्पट होई, आणि तें जीन जर दुसऱ्या घोड्यावर घातलें तर त्यासुद्धां त्याची किंमत पहिल्या घोड्याच्या तिप्पट होई; तेव्हां त्या घोड्यांची वेगळाली किंमत काय असावी?

खुलासा. जिनाची किंमत ५०० रु. आहे, तेव्हां पहिले घोड्यावर जीन घातलें तर —

∴ १ ले घो. किं. + ५०० रु. = २ पट २ रे घो. किं.
प्रत्येक बाजूस १००० मिळविले तर,

१ ले घो. किं. + १५०० रु. = २ पट २ रे घो. किं. + १००० रु.

दुसरे घोड्यावर जीन घातलें तर—

२ रे घो. किं. + ५०० रु. = ३ पट १ ले घो. किं.
दोन्ही बाजूस २ नीं गुणिलें तर—

२ पट २ रे घो. किं. + १००० रु. = ६ पट १ ले घो. किं.
परंतु २ पट २ रे घो. किं. + १००० रु. = १ ले घो किं. + १५०० रु.

∴ ६ पट १ ले घो. किं. = १ ले घो. किं. + १५०० रु.

दोन्ही बाजूंत १ ले घो. किं. वजा दिली तर—

५ पट १ ले घो. किं. = १५०० रु.

ह्मणून १ ले घो. किं. = ३०० रु. हें एक उत्तर.

आणि ३०० + ५०० = ८०० = २ पट २ रे घो. किं.

ह्मणून २ रे घो. किं. = ४०० रु हें दुसरें उत्तर.

२ री रीति.

एक घोडा व जीन यांची किंमत २ तर दुसऱ्या घोड्याची १; ह्मणजे दुसऱ्या घोड्याची किंमत तिघांचे किमतीच्या $\frac{१}{३}$ बरोबर आहे. तसेंच दुसरा घोडा व जीन यांची किंमत ३ तर पहिल्या घोड्याची १; ह्मणजे तिघांच्या किमतीचा $\frac{१}{४}$ बरोबर पहिल्या घोड्याची किंमत आहे. आतां तिघांची किंमत १ धरल्यास व त्यांतून $\frac{१}{३}$ व $\frac{१}{४}$ वजा केल्यास बाकी जिनाची किंमत राहील ह्मणजे $१ - (\frac{१}{३} + \frac{१}{४}) = \frac{५}{१२}$ ही जिनाची किंमत झाली. पण त्याची किंमत ५०० रुपये आहे. ह्मणून,

$\frac{५}{१२} : \frac{१}{३} :: ५०० : ४००$ रु. ही दुसऱ्या घोड्याची किं.
व $\frac{५}{१२} : \frac{१}{४} :: ५०० : ३००$ रु. ही पहिल्या घोड्याची किं.
हें उत्तर.

१७ प्रश्न. दोन संख्या अशा आहेत कीं त्यांची बेरीज ३० होते; आणि एकीचा $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{६}$ हे एकंदरीनें दुसरीचे $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{१}{४}$ यांचे बेरजेबरोबर आहेत. तर त्या दोन संख्या कोणत्या?

खुलासा. $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{६}=\frac{१८+१२+६}{३६}=\frac{३६}{३६}=१$. यावरून असें दिसतें कीं, एका संख्येचे $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{६}$ यांची बेरीज त्या संख्येइतकीच आहे.

$\frac{१}{२}+\frac{३}{४}+\frac{१}{४}=\frac{२+३+१}{४}=\frac{६}{४}=$ १॥. यावरून असें दिसतें कीं, दुसरे संख्येचे $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{१}{४}$ यांची बेरीज घेतली तर त्या संख्येच्या दिढीनें येते; परंतु ही बेरीज पहिले बेरजेइतकी आहे. ह्मणून दुसरी संख्या पहिले संख्येपेक्षां दिढीनें लहान असली पाहिजे.

ह्मणजे पहिली संख्या जर तीन तर दुसरी संख्या दोन असें असलें पाहिजे. या दोहोंची बेरीज ५ होते; आणि आमचे प्रश्नांत ती बेरीज ३० आली पाहिजे ह्मणजे ६ पट अधिक आली पाहिजे. ह्मणून इच्छिल्या संख्या ३ × ६ = १८ आणि २ × ६ = १२ ह्या झाल्या.

१८ प्रश्न. दोन झाडांवर कांहीं पोपट बसले होते. एका झाडावरचे पोपट दुसऱ्या झाडावरच्या पोपटांस असें ह्मणाले कीं, जर तुमच्यांतले ७ पोपट आमच्यांत आले तर आह्मी तुमच्या तिप्पट होऊं. त्यांस दुसऱ्या पोपटांनीं असें सांगितलें कीं, जर तुमच्यांमधील ७ पोपट आमच्यांत येतील तर तुह्मी आह्मी संख्येनें सारखे होऊं. तर प्रत्येक झाडावर किती किती पोपट होते तें सांगा.

खुलासा. प्रश्नांतील दुसरे प्रतिज्ञेप्रमाणें पहिले झाडावरचे सात पोपट गेले ह्मणजे दुसरे झाडावर ७ पोपट वाढणार. दोन्ही झाडांवर आतां बाहेरचे सात सात पोपट आणून घातले तर पहिले झाडावर तूट पडलेली भरून येऊन दुसरे झाडावर मात्र १४ पोपट अधिक होतील, ह्मणून,

प. झा. पो. = दु. झा. पो. + १४

आणि दु. झा. पो. = प. झा. पो. − १४

या बरोबरींत दोहींकडे सात सात पोपट कमी केले तर,

दु. झा. पो. – ७ = प. झा. पो. – २१

परंतु, प्रश्नांतील पहिले प्रतिज्ञेप्रमाणें दुसऱ्यांतले ७ पोपट पहिल्यांत आले ह्मणजे पहिल्यावर, दुसऱ्यांतील शिलक राहतात त्यांचे तिप्पट होतात.

ह्मणजे,

प. झा. पो. + ७ = ३ (दु. झा. पो. – ७)

परंतु दु. झा. पो. – ७ = प. झा. पो. – २१

∴ प. झा. पो. + ७ = ३ (प. झा. पो. – २१)

= ३ (प. झा. पो.) – ६३

∴ प. झा. पो. = ३ (प. झा. पो.) – ७०

∴ प. झा. पो. + ७० = ३ (प. झा. पो.)

आतां, पहिले झाडावरचे पोपटांत ७० मिळविल्यानें जर तिप्पट पोपट होत आहेत, तर ७० हे पोपटांचे दुपटीबरोबर असले पाहिजेत; म्हणजे पहिले झाडावरचे पोपट ३५ असले पाहिजेत; हें एक उत्तर.

पहिल्या झाडापेक्षां दुसऱ्या झाडावर १४ पोपट कमी आहेत, ह्मणून ३५ – १४ = २१ हे दुसऱ्या झाडावरचे पोपट हें दुसरें उत्तर.

२ री रीति.

दुसऱ्या झाडावरचे ७ कमी झाले तर सर्व पक्ष्यांचे $\frac{१}{४}$ पक्षी त्या झाडावर राहतात. व ७ नवीन आले तर सर्व पक्ष्यांच्या $\frac{१}{२}$ होतात. आतां अशी कल्पना केली कीं, प्रत्येक झाडावर बाहेरचे सात सात पोपट आणून बसविले तर पहिले झाडावरची तूट भरून येईल व दुसऱ्यावर मात्र १४ पोपट अधिक होतील. ह्मणून $\frac{१}{२} - \frac{१}{४} = \frac{१}{४}$ बरोबर १४ पक्षी ∴ सर्व पक्षी = ५६ व $\frac{१}{२}$ पक्षी – ७ = २१ दुसऱ्या झाडावरचे पोपट हें एक उत्तर व ५६ – २१ = ३५ पहिल्या झाडावरचे पोपट, हें दुसरें उत्तर.

उत्तरें.

क्र. पृ. ७.

(१) ४, ६ रुपये, १५ पायली व ५ हे अंश आणि १६, ८, १२ पायली व ४ रुपये हे त्यांचे छेद; $\frac{५}{४}$ रु. हा भाज्य-भाजकांचा अशक्य संबंध आहे. (२) $\frac{१२}{१७}$, $\frac{१००१}{१००००००}$. (३) $\frac{१}{५}$; $\frac{१}{४}$; $\frac{९}{२}$; $\frac{२३}{३}$; $\frac{२५}{४९}$; $\frac{५९०}{१००००००००}$. (४) चवदा चतुर्थांश; तीस दशांश; दोन चतुर्थांश अट्टे किंवा दोहोंच्या आठपट (ह्मणजे सोळा) चतुर्थांश; चोहोंच्या नऊपट (छत्तीस) षष्ठांश; आठ अर्धे हात; नऊ मणाचे बारावे हिस्से.

(५) अपूर्ण परिमाण.	संख्या.
$\frac{१}{४}$	१४
$\frac{१}{१०}$	३०
$\frac{\text{अट्टा}}{४}$	२
$\frac{१}{६}$	४ ची ९ पट
$\frac{\text{हात}}{२}$	८
$\frac{\text{मण}}{१२}$	९

(६) चवदांचा चौथा भाग अथवा चतुर्थांश, तिसांचा दशांश, दोन अट्ट्यांचा चतुर्थांश, चार नवांचा षष्ठांश, आठ हातांचा द्वितीयांश, नऊ मणांचा द्वादशांश; वरील उदाहरणांत रेषेचे वरील सर्व अंश व रेषेचे खालील सर्व छेद. जसेः– १४, ३० इ. हे अंश व ४, १० इ. हे छेद. ३$\frac{३}{४}$, ३, ४, ६, ४ हात, $\frac{९}{१२}$ मण. ह्या किंमती. (७) अनुक्रमेः—सम, विषम, भागानुबंध पूर्णांक, विषम, भागानुबंध पूर्णांक, विषम, सम. (८) कलम १ ते १२ पहा. (९) $\frac{३}{४}+\frac{२}{१६}+\frac{३}{६४}$; $५+\frac{१}{४}+\frac{२}{१६}+\frac{३}{६४}$. (१०) ४ तोळे ८ मासे; ५ पै. ३ फा.; ६ मण ४ पा.; १ बीत २ मुठी; १५ पळें; ५ महिने; ५ सौरमास (ह्मणजे तारीख २१ मार्चपासून चालू होणारे मधु, माधव इ.

मराठी ऋतूंचे महिने किंवा जानुवारी, फेब्रुवारी इ. इंग्रजी महिने.)

ख. पृ. ९.

(१) $\frac{४०}{५}$, $\frac{१३५}{५}$, $\frac{२१६}{२७}$, $\frac{७२९}{२७}$. (२) $\frac{३७४}{११}$, $\frac{१४८५}{११}$, $\frac{५७८}{१७}$, $\frac{२२९५}{१७}$. (३) $\frac{९०}{१५}$, $\frac{१३५}{१५}$, $\frac{१८०}{१५}$, $\frac{३००}{१५}$. (४) $\frac{८५०}{३४}$, $\frac{११५६}{३४}$, $\frac{५७८}{३४}$, $\frac{३७७४}{३४}$.

ग. पृ. १०.

(१) $\frac{२४}{७}$. (२) $\frac{९२}{९}$. (३) $\frac{२४३५}{११}$. (४) $\frac{२३६}{१७}$. (५) $\frac{४२७}{१३}$. (६) $\frac{६०२९}{३०}$. (७) $\frac{८६३}{१२}$. (८) $\frac{२३३६}{१५}$. (९) $\frac{२३१५}{१८}$. (१०) $\frac{१३८४}{३७}$. (११) $\frac{६०२७}{३०}$. (१२) $\frac{३१४७}{२५}$. (१३) $\frac{८२२९}{१६}$. (१४) $\frac{२१३१}{२१}$. (१५) $\frac{९}{४}$. (१६) $\frac{७}{२}$. (१७) $\frac{१९}{४}$. (१८) $\frac{८१}{१६}$. (१९) $\frac{५७}{८}$. (२०) $\frac{५१३}{६४}$. (२१) $\frac{५७९}{६४}$. (२२) $\frac{३८}{५}$. (२३) $\frac{७९}{९}$. (२४) $\frac{१३९}{७}$. (२५) $\frac{४३९}{१०}$.

घ. पृ. ११.

(१) ४$\frac{१}{९}$. (२) ७$\frac{२}{११}$. (३) २४$\frac{१}{१३}$. (४) २६$\frac{२९}{८७}$. (५) १६$\frac{१५}{७७}$. (६) ३३$\frac{१}{९५}$. (७) १०$\frac{१}{४}$. (८) १५. (९) ५$\frac{१}{१६}$. (१०) १४३$\frac{१}{२३}$. (११) ४०$\frac{२३}{२५}$. (१२) ४१$\frac{५२}{७५}$. (१३) १६. (१४) ४०. (१५) ३५$\frac{७}{१०२}$. (१६) ३५$\frac{५३}{११७}$. (१७) २१. (१८) ५$\frac{२}{१६}$. (१९) २$\frac{३}{६४}$. (२०) २$\frac{३}{८}$. (२१) ८$\frac{३}{६}$. (२२) ३. (२३) १३$\frac{१}{३}$. (२४) १$\frac{१}{१०}$. (२५) १$\frac{४}{८}$. (२६) १३$\frac{८}{९}$. (२७) ३$\frac{११}{१२}$.

ङ. पृ. १४.

(१) ८$\frac{३}{४}$, ११$\frac{२}{३}$, १७$\frac{१}{२}$ व $\frac{७}{३६}$, $\frac{५}{३६}$, $\frac{३५}{२८८}$. (२) ६$\frac{११}{१४४}$, ६$\frac{१७}{१८}$, १३$\frac{८}{९}$ व $\frac{१२५}{११५२}$, $\frac{५}{१४४}$. (३) $\frac{६४०}{६९३}$, $\frac{३२०}{२३१}$, $\frac{१२८०}{६९३}$, $\frac{१६००}{६९३}$, $\frac{३२०}{९९}$ व $\frac{३२०}{४१५८}$, $\frac{३२०}{६२३७}$. (४) $\frac{३२०}{४८५१}$, $\frac{४०}{६९३}$, $\frac{३२०}{६२३७}$, $\frac{३२}{६९३}$, $\frac{३२०}{७६२३}$ व $\frac{३२०}{२३१}$, $\frac{१२८०}{६९३}$. (५) १२,

२२, ३६, ८८, २०. (६) ८०, ९६, २२४, ५०, ७६८. (७) २१, ४८, ४५, २८, १५; १४, ३०, २१, ३०, १६. (८) $\frac{२८}{४८}$, $\frac{६}{३६}$, $\frac{२५}{१५}$, $\frac{३}{२}$.

च. पृ. १६.

(१) $\frac{६०}{८४}$, $\frac{७७}{८४}$, $\frac{७८}{८४}$. (२) $\frac{१७५}{३२५}$, $\frac{२०८}{३२५}$, $\frac{२४५}{३२५}$. (३) $\frac{७५६}{९१८}$, $\frac{७५६}{१०५०}$, $\frac{७५६}{११५२}$, $\frac{७५६}{९८०}$. (४) $\frac{१६}{१३}$, $\frac{२५}{२१}$, $\frac{१३}{२७}$. (५) $\frac{३१८}{१८}$, $\frac{४५८}{१८}$, $\frac{२४९}{१८}$. (६) $\frac{१००५०}{२४०}$, $\frac{५७४०}{२४०}$, $\frac{११९०५}{२४०}$, $\frac{२२६८}{२४०}$. (७) $५\frac{२}{३}$, १२, $८\frac{८}{११}$, $३७\frac{३}{५}$, १६१, $७०\frac{८}{९}$. (८) $\frac{५}{४९}$, $\frac{१५}{१३३}$, $\frac{९}{१२०}$, $\frac{१३}{२२३}$, $\frac{५५}{८४}$, $\frac{११}{१७}$. (९) २०, १८, २५, ४०, १००. (१०) $\frac{१२}{२०}$, $\frac{२४}{४४}$, $\frac{१०}{३४}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{२८}{३८}$, $\frac{३}{१२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{३६}{२४}$.

छ. पृ. १८.

उदाहरण १ पासून ११ अखेर संक्षेपरूपें देण्याचीं उदाहरणें आहेत. अतिसंक्षेपरूप एक होईल; पण संक्षेपरूपें अनेक होतील; करितां सर्वांचीं उत्तरें शिक्षकानें मुलांपासून काढवावीं. दिलेल्या उदाहरणांतील अंश व छेद हे अविभाज्य संख्यात्मक अवयवरूपानें लिहावे ह्मणजे असें दिसून येईल कीं, अंशच्छेदांत जितके साधारण अवयव असतील तितके प्रकार संक्षेपरूपाचे होतील (अं. भा. कलम १६८ पहा.)

उदाहरण $\frac{३२४}{७२०} = \frac{२\times२\times३\times३\times३\times३}{२\times२\times२\times२\times३\times३\times५}$.

(१२) $\frac{४}{५}$, $\frac{१७२६}{१७८१}$, $\frac{९}{२२}$, $\frac{३}{४}$. (१३) $\frac{१३}{१४}$, $\frac{२२}{४३}$, $\frac{८}{९}$, $\frac{३}{४}$. (१४) $\frac{११}{१६}$, $\frac{९}{३८}$, $\frac{६०}{७७}$, $\frac{२९६५}{४०५१}$. (१५) $\frac{११}{१३}$, $\frac{२०}{२१}$, $\frac{२३}{३३}$, $\frac{७७}{८१}$. (१६) $\frac{३}{८}$, $\frac{५}{११}$, $\frac{१३}{२३}$. (१७) $\frac{४६९}{१४४४}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{३७}{६६}$. (१८) $\frac{२८३}{२४३}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{३४३}{५२३}$. (१९) $\frac{२५}{३३}$, $\frac{१३}{४५६}$, $\frac{२९}{५५}$. (२०) $\frac{२}{३}$, $\frac{२}{३}$.

ज. पृ. २०.

(१) $१\frac{१}{२}$. (२) $३\frac{६}{७}$. (३) $\frac{७}{१२}$. (४) $\frac{१}{४}$. (५) $१८\frac{४}{५}$.

(६) $\frac{१}{८}$. (७) $\frac{५}{८}$. (८) १५७$\frac{१}{२}$. (९) ११. (१०) ३$\frac{१}{३}$. (११) १६$\frac{१}{२}$. (१२) ४३$\frac{५}{१६}$. (१३) ३. (१४) $\frac{१}{२}$. (१५) $\frac{३९}{६४}$. (१६) $\frac{४}{९}$. (१७) ६७$\frac{१}{२}$. (१८) १$\frac{२}{५}$. (१९) ७$\frac{७}{४४}$. (२०) १७०$\frac{५}{८}$. (२३) २८$\frac{९१}{१६०}$. (२२) ३$\frac{६९}{५१२}$. (२३) $\frac{१}{२०४८}$. (२४) ११२$\frac{१०९}{१२८}$. (२५) $\frac{११}{८१९२}$.

झ. पृ. २४.

पुढच्या ६ उत्तरांत भाजक लघुतम दिला आहे. केवळ साधारण भाजक धरल्यास उत्तरें कशीं अनेक होतील तें शिक्षकानें दाखवावें.

(१) $\frac{१०५,\ १४०,\ १२६,\ ६०}{२१०}$.

(२) $\frac{१९२५,\ १३२०,\ १८४८,\ ४२०}{२३१०}$.

(३) $\frac{१६,\ १८,\ २०,\ २१}{२४}$. (४) $\frac{१८,\ ८०,\ २७,\ १२८}{१४४}$.

(५) $\frac{८,\ २८,\ ३०,\ ३१}{३२}$. (६) $\frac{६०,\ ४५,\ १६,\ ३९}{७२}$.

(७) $\frac{६३,\ ८८,\ १०२,\ ७६,\ ७५}{१४४}$.

(८) $\frac{१६२,\ १०८,\ १४४,\ २४,\ १६}{२४३}$.

(९) $\frac{७२०,\ ३७८,\ ५२५,\ ६१२,\ ८०,\ ७६५}{१२६०}$.

(१०) $\frac{४४०,\ ७६५,\ ९००,\ ५०४,\ २४०,\ १०५०}{१०८०}$.

(११) $\frac{५४०,\ ६३०,\ २१६,\ ३३०,\ २६०,\ ३९०}{९००}$.

(१२) $\frac{५४००,\ ६९३०,\ २२४०,\ १८९०,\ ३२१३}{७५६०}$.

(१३) $\frac{१६८,\ १६,\ ४०,\ ३४८,\ ४०८,\ ४३५}{४८}$.

(१४) $\frac{१५६,\ २४३,\ ४०,\ १५६,\ २९४,\ १११}{४८}$.

(१५) $\frac{२६०,\ ४२४,\ २४५,\ ९००,\ ६४५,\ ५७६}{१२०}$.

(१६) $\frac{१५+८}{१९+८}$; $\frac{१५}{१९}$. (१७) चढत्या क्रमानें $\frac{९}{२५}$, $\frac{८+९}{१७+२५}$, $\frac{८}{१७}$. (१८) चढत्या क्रमानें $\frac{१३}{१४}$, $\frac{१३+१५}{१४+१६}$, $\frac{१५}{१६}$. (१९) चढत्या क्रमानें $\frac{५}{६}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{५+६+७+९}{६+७+८+१०}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{९}{१०}$. (२०) $\frac{५}{१३}$, $\frac{९}{२०}$. (२१) $\frac{१९}{१८}$, $\frac{२९}{२७}$. (२२) $\frac{१०९१}{१४३}$, $७\frac{९}{११}$. (२३) $\frac{७१}{८४}$, $\frac{२८९}{७२०}$. (२४) $\frac{१४५}{४२८}$. (२५) चढत्या क्रमानें $\frac{४२०}{१८९०}$, $\frac{४२०}{६६५}$, $\frac{४२०}{५०४}$, $\frac{४२०}{४८०}$, $\frac{४२०}{४६०}$.

अ. पृ. २८.

(१) $२\frac{६}{७}$. (२) $\frac{३१}{३२}$. (३) $२\frac{१}{८}$. (४) $२\frac{३१}{३६}$. (५) $२\frac{४३}{१८०}$. (६) $२\frac{११}{३६}$. (७) $२\frac{४१}{१४४}$. (८) $१\frac{७३}{९०}$. (९) $३\frac{६५२१}{१७०९४}$; $१५\frac{१}{१२}$. (१०) $१०\frac{१७}{७२}$; $१३\frac{१}{१०}$. (११) $३\frac{६५}{७२}$; $१३\frac{१९}{४५}$. (१२) $३\frac{८५१}{१०८०}$; $५\frac{३४}{६३}$. (१३) $१९\frac{४}{३५}$; $५\frac{५९}{१०५}$. (१४) $५\frac{१०७}{७२०}$; $१३\frac{३२९}{४००}$. (१५) $१८\frac{११}{२०}$; $११\frac{७४}{१६५}$. (१६) $३४\frac{११३९}{१४४०}$. (१७) $४४\frac{३९}{४०}$. (१८) $१७\frac{४१}{६४}$. (१९) $१२\frac{१}{१६}$. (२०) $२\frac{२}{२१}$. (२१) $११\frac{३}{४}$; $२३\frac{११}{५०}$. (२२) ६८; $१७\frac{१७}{२०}$. (२३) $१\frac{१०}{२७}$. (२४) $२\frac{५}{६६}$. (२५) $३\frac{१}{३६}$. (२६) सर्व हिस्से.

ट. पृ. ३१.

(१) $\frac{३}{५}$; $\frac{३}{१०}$; $\frac{१}{१२}$; $\frac{१}{६}$. (२) $२\frac{१}{२}$; $१\frac{१}{८}$; $२\frac{१}{७}$; $१०\frac{५}{१२}$. (३) $\frac{४१}{१००}$; $५\frac{२१}{२५}$; $४८\frac{२}{३}$; $२\frac{३१}{४२}$. (४) $९\frac{६२}{७५}$; $\frac{३३१}{३३६}$; $२\frac{२६८}{३६९}$; $२\frac{५५१}{५५२}$. (५) $\frac{१३१}{१७५}$; $१६\frac{८८}{१०५}$; $४\frac{१३}{३०}$; $\frac{८७}{११०}$

(६) $\frac{३७}{५४}$; १४$\frac{७}{२०}$. (७) ६$\frac{५}{७}$; १६$\frac{४४}{४५}$; ५$\frac{४७}{५६}$; १$\frac{७९}{११७}$; १३$\frac{८९}{१६५}$; १$\frac{२२७}{२४५}$; २$\frac{२११}{३४०}$. (८) ६$\frac{२९}{६०}$. (९) $\frac{२३}{४५}$. (१०) २$\frac{११}{१२}$; १$\frac{१३}{२४}$; $\frac{१९}{४८}$. (११) $\frac{७}{२४०}$. (१२) ११$\frac{५}{१२}$. (१३) ४$\frac{१०७}{१६८}$. (१४) $\frac{१३}{६०}$; $\frac{१७}{६०}$; १$\frac{३७}{६०}$. (१५) १४$\frac{१५}{२२}$; १$\frac{३९}{८०}$. (१६) ७$\frac{३७}{५०}$. (१७) $\frac{१६७}{४३२}$. (१८) $\frac{९७}{१२०}$. (१९) २९$\frac{४३}{३००}$. (२०) ३$\frac{६७}{९६}$; ३४. (२१) १$\frac{१२१}{६२४}$. (२२) १२$\frac{६२८७३}{९५७६०}$.

ठ. पृ. ३४.

(१) $\frac{४५}{८८}$; १; $\frac{९}{२०}$. (२) ७८$\frac{४}{७}$; ६० ; ४०९$\frac{१}{२}$. (३) ४९$\frac{१६}{२१}$; ५$\frac{१}{१३}$. (४) $\frac{१}{५}$; ४$\frac{९७}{१३२}$. (५) १$\frac{१}{८}$; १७$\frac{७}{९}$. (६) १०$\frac{१}{२}$; ११८$\frac{७९}{१२८}$; १$\frac{७}{८}$. (७) १०$\frac{१}{२}$; २८$\frac{७}{८}$; ७$\frac{११}{२४}$. (८) ३०$\frac{४९}{१६०}$. (९) २. (१०) २. (११) २२$\frac{२}{१७५}$; –१४$\frac{११३}{१४०}$; १४$\frac{२३}{३५}$. (१२) २६$\frac{३}{१०}$; १८$\frac{१६१}{१८०}$. (१३) ३२३९९$\frac{२५}{१०६}$; ९९८९९९$\frac{३९४७}{४९४६}$; २८८५$\frac{८९९}{९०५}$. (१४) २५००. (१५) $\frac{२}{५}$. (१६) १३$\frac{४७}{६००}$. (१७) १०९$\frac{१७}{२२}$.

ड. पृ. ३६.

(१) ३; $\frac{८}{९}$; $\frac{४}{९}$; $\frac{५}{८}$. (२) १$\frac{१}{३}$; $\frac{४}{५}$; १४$\frac{३८}{४५}$. (३) $\frac{१}{१८}$; $\frac{११२}{१३५}$. (४) $\frac{५}{४८}$; ५२$\frac{१}{४}$. (५) $\frac{१}{५}$; $\frac{५}{४८}$. (६) १६; $\frac{३}{४}$; $\frac{५}{२७}$; $\frac{३}{२६}$. (७) ४$\frac{२}{३५}$; २; १$\frac{५}{९}$; २. (८) १०$\frac{१०}{२३}$; २$\frac{२}{३}$; ३८$\frac{२}{११}$. (९) ३$\frac{४}{७}$; १६; १$\frac{१३९}{२४५}$. (१०) १. (११) $\frac{८१}{१००}$. (१२) $\frac{१}{५}$; $\frac{९}{२१७}$. (१३) $\frac{९}{१४}$; $\frac{१२८}{१७५}$. (१४) $\frac{३}{११}$. (१५) १$\frac{२६३}{२८०}$. (१६) $\frac{१६७५}{५१६६}$. (१७) ५$\frac{१०४३३}{१२३२०}$. (१८) २२$\frac{५}{१८}$. (१९) ८$\frac{१७१}{५७४}$.

ढ. पृ. ४०.

(१) $\frac{३}{५}$; ३$\frac{१}{२}$; $\frac{५१}{७८}$; $\frac{३९३}{५६२}$; $\frac{८}{६७}$; $\frac{२५}{३८१}$; $\frac{४१०}{८४३}$; १$\frac{४३}{७७}$. (२) १; १; २$\frac{६}{२१}$; $\frac{२}{२१}$. (३) ३; $\frac{८}{२५}$; $\frac{४६}{२५१}$; $\frac{१}{११}$. (४) ७; ५$\frac{११}{१२}$; १$\frac{२३५२१}{६४७०४}$; ४$\frac{२५}{४८}$. (५) ३$\frac{९३३}{१२२८}$; $\frac{११२५}{५११७}$; $\frac{२५}{१७८}$. (६) २$\frac{६}{३५}$; ४$\frac{३}{३}$; $\frac{२५५}{३६४}$; $\frac{७}{२२}$. (७) १; १. (८) ३$\frac{९}{१३}$.

(९) $\frac{१}{२}$; ७$\frac{३३}{३५}$. (१०) $\frac{८६७}{१२८०}$; १$\frac{३}{४}$; $\frac{३७}{१७५}$. (११) १ ; १. (१२) $\frac{१४}{८१}$; $\frac{१४}{८१}$. (१३) १$\frac{३}{४}$; २$\frac{३६}{११५}$; ४$\frac{१}{६}$. (१४) ३$\frac{७२७}{१६३६}$; ४$\frac{१२०९२३}{२५२८८५}$; १४$\frac{३९}{६४}$. (१५) ६$\frac{२३}{३०}$; २. (१६) १ ; $\frac{३७७०७}{५०३९६}$. (१७) ५ ; १८. (१८) ६६. (१९) १५$\frac{२६४८७}{५६६७९४}$. (२०) $\frac{७५}{७७}$. (२१) $\frac{१}{२}$. (२२) १. (२३) $\frac{२२६}{२९९}$. (२४) २.

ण. पृ. ४७.

(१) ४ खं. ४ म. (२) ७ गुं. २$\frac{२}{३}$ आ. (३) २५ व. १८ प. ४५ वि. प. (४) २ रु. ११ आ. ४$\frac{४}{५}$ पै. (५) १७ शि. ६ पे. (६) बेरीजः- १७ शि. ७ पे. २ फा. वजाबाकीः- १३ शि. १० पे. २ फा. (७) ६ फ. ९ पो. २ या. (८) १२ आ. ५ पै. (९) ८७५०$\frac{३४}{३७}$ घ. इं. (१०) १ दि. ६ अ. ११$\frac{३}{३२}$ मि. (११) ४ खं. $\frac{२}{५}$ मण. (१२) १५ हं वे. १३ पौं. १२ औं २ रू. २१ पो. २४ चौ. या. ६ चौ. फू. १०८ चौ. इं; ५ फ. ३२ पो. १ या. १ फू. ६ इं.; १८ पो. १ या. (१३) १६ ता. १९ मि. १२ से.; ३७ पो. २४ चौ. या. ६ चौ. फू. १०८ चौ. इं.; ३ क्का.; ३ ए. १ क्का. २ ने. $\frac{३}{५}$ इं. (१४) १०९ दि. १२ ता. २० मि.; १ क्का. ६ पौं.; ३ दि. ११ ता. १३ मि. (१५) १ ग्या.; २० चौ. या. ५ चौ. फू. ९० चौ. इं. (१६) ८ पौं. ५ शि. ६ पे.; ४ पौं. ० शि. ८ पे. १$\frac{२}{५}$ फा. (१७) २ क्का. १७ पौं. १ औं. ३$\frac{११}{१५}$ ड्रा.; १२ हं. वे. २ क्का. १४ पौं. १० औं. १०$\frac{२}{३}$ ड्रा. (१८) २ मै. ६ फ. २२ पो. ३ इं.; १०० ए. ३ रू. १७ चौ. पो. (१९) ४ दि. २३ ता. ३१ मि. ३१$\frac{३}{७}$ से.

त. पृ. ५२.

(१) $\frac{१५}{२८८}$. (२) $\frac{६}{११}$. (३) $\frac{१}{१६०}$. (४) वजा जात नाहीं. $\frac{१२७}{५६०}$ यानें अधिक आहे. (५) $\frac{५२१}{१२८८}$ पौं. त्रा ; $\frac{४५९}{१४००}$ पौं. अवा. (६) १५$\frac{२९}{३२}$ हं. वे.; $\frac{५०९}{६४०}$ टन. (७) $\frac{४७}{६४}$ क्का. (८) $\frac{२८७}{२८८}$ हं. वे. (९) $\frac{८९९}{११२०}$ मै. (१०) $\frac{३}{११}$. (११) $\frac{१}{३}$. (१२) १६९$\frac{७}{१७}$. (१३) $\frac{११}{७}$.

थ. पृ. ५४.

(१) १४७० झाडे. (२) ४० मो. (३) १२$\frac{४}{७}$ फरे. (४) ११ ट. ४ का. १ बु. ३ ग्या. १ पा. (५) २४$\frac{६७७}{७१२}$. (६) $\frac{८५१}{१७०००}$. (७) १ खं. ६ म. ४ पा.

द. पृ. ५५.

(१) ६ ता.; ३ दि. १२ तास. (२) ४ शि. ३ पे.; १३ पौं. १४ शि. ६ पे. (३) ४५ या. ३३$\frac{१}{३}$ फू. (४) १ पौं. ० औं. ३ पे. १६ ग्रे. (५) २१ पौं. ६ औं. ८ ड्रा.; १७ हं.वे. ० का. २४ पौं. १४ औं. ३$\frac{५}{६}$ ड्रा. (६) २६$\frac{१}{१५}$; ७$\frac{९}{१२५}$. (७) १५ पौं. (८) २ ए. २० पर्च. (९) १७$\frac{१}{२}$ चांद्रमास.

ध. पृ. ६१.

(१) ३·५; ४·०७; ·३; ६·०८; ·४; ·६; ·१४; ·१३५; ·०४; ·००००५. (२) २८·२५८७; ५०·४००६; ·००००७०९; ·०००८००६१०; ·००४६०८. (३) ८४·०३; ४०००४·७१५; २८०·४; ७०·०४; ९·००८. (४) ४७·८५१४; ६·०४८००५२. (५) व (६) हीं उदाहरणें शिक्षकानें मुलांकडून वाचून घ्यावीं. (७) ८००·३०५६; ८००३·०५६; ८००३०·५६. (८) ·१७२८; १७·२८; ५२३६००. (९) ७·३५६; ·०७३५६; ·०३७१६५; ·०००३७१६५. (१०) ५·७३२४; ·०१; ·००००००१. (११) $\frac{४३७५}{१०००} = \frac{३५}{८}$; $\frac{८१२५}{१००००} = \frac{१३}{१६}$; $\frac{३७८७५}{१०००००} = \frac{३०३}{८००}$; $\frac{२३०४०१६}{१००००००} = \frac{७२००३}{३१२५}$. (१२) $\frac{६८७५}{१०००००००} = \frac{११}{१६०००}$; $\frac{५००१६८७५}{१००००००००} = \frac{१६०३१}{३२०००}$; $\frac{२२२४६४}{१००००००} = \frac{३४७६}{१५६२५}$. (१३) १३$\frac{२७}{४००}$; ९$\frac{७११}{३२००}$; २३$\frac{११}{१६०००}$. (१४) ८९$\frac{१०२४}{७८१२५}$; १२$\frac{३२२२६५६२४९}{४०००००००००००}$. (१५) ·७; ११·७; ·२३; १·०१५. (१६) ·०१; ·०२१; ·०११७; ·००००००६. (१७) ·२३००३७. (१८) १·११११११. (१९) १३·००३००५. (२०) १०·११०१०१. (२१) $\frac{३७}{१००००}$; $\frac{१}{५००००}$; $\frac{१}{४}$; $\frac{३}{८}$. (२२) $\frac{३}{४००}$, १$\frac{९}{४०}$, $\frac{३}{१६}$, ३$\frac{९}{४०}$. (२३) $\frac{११}{१६००००}$;

७$\frac{३}{२००}$; २३$\frac{६१}{१६००}$. (२४) १५$\frac{१३}{६४}$; १$\frac{३}{२८०}$; ४$\frac{१}{१२८}$.

न. पृ. ६३.

(१) ३४·५४५१. (२) ७८२·८५९४. (३) ३७५०११३· ६१४२१३. (४) २४९२·२६२२१२३. (५) १९·००२; ३·४४९०२. (६) २१·१३३५; ३४०९·०००१३. (७)१९·०००२; १·००१३. (८) ·००००००१३; १४·१२८८३५. (९) ·६६३२२; २·७४८६. (१०) ·००३२१३; ·३४२३५. (११)१६·६७९९२८४. (१२) १५·६३५५६३. (१३) ६·१७१२५६. (१४) ·०३४३५३. (१५) ३·१४१५ हें मान घेतलें तर १ दशसहस्रांशाच्या निंमेहून जास्त कसर सुटेल व ३·१४१६ हें मान घेतलें तर एक दशसहस्रांशाच्या निंमेपेक्षां कमी कसर घेतली जाईल, ह्मणून ३·१४१६ हें मान घेण्यांत चूक कमी होईल.

प. पृ. ६६.

(१)७२३·६; १४६·४५६१. (२) ·००००००१; ७४·१५१. (३) ·०७५०४; ·०००६०२. (४) ·००१३०१४; १·५. (५) ५·३१४४१. (६) ४·०९६ (७) ·०००१२३४३२१. (८) ·०००४४४०८. (९) ·०१७७७१५; ·००१. (१०) १२·६६८०६; २३·६८६७६; ·००१. (११) ·०६७२; ९·५६७०९.

फ. पृ. ६९.

(१) ·६२५; ·०००६२५. (२) ६२५००००; ·००००६२५. (३) ४९००००० ; ६·३. (४) १८५ ; ३०. (५) ४०००; ८·७८९०६२५ (६) २·४ ; १२००. (७) ·०००१५६२५; ७११६८५८०. (८) ·०१२२६९९ इ०; १५६८·६२७ इ०. (९) ·३३८८२७८; ·०००३८३१७७५७इ०. (१०) २९०; ·०१४९७४इ०. (११) १०; १०·०१; १५४५; ११००००. (१२) २१·३२; २५०००००; ·००९९९०००९९९० इ०. (१३) ३००. (१४) ·००२१३ इ०; ·००६५००८ इ०. (१५) ६·०३६० इ०; ९१·३३६ इ०. (१६) ·३०६८५ ; २०५९. (१७) १४७ ;

२२९६. (१८) ·०८६९०४; ·०००११ इ०. (१९) ·९; ८५·१; ३२६·४. (२०) २८१२·५. (२१) ९६१·६८३२३२१. (२२) ६४००.

ब. पृ. ७६.

(१) ·०४; ·०५२; ५·२५; १·६. (२) ·८४८; ११·०१३६; १५·६२५; ५·१८७५. (३) ७·२०३१२५; ·१३२८१२५; ·००१५६२५; ११·००१६९६. (४) ·००१९५३१२५; १·०००९७६५६२५; ·००९२̇८५७१४̇; ·००१३६७१८७५. (५) ·१७०५; ·००२१६; ·३२. (६) १·४̇; ·५७२̇; २·३४̇५̇; ·०१२३̇६̇. (७) २·९२̇८५७१४̇; ५·०४̇५̇; ·०१̇३२̇; २३·१५६̇. (८) ·०̇०८९̇; ५·७̇६१९०४̇; १७·१२९३̇१̇; ·१२३̇४५̇; (९) ·०३६̇४८̇; ·१००३३̇७८̇; ·४०८६४̇; ·०२̇०५०२̇; (१०) ·०̇५८८२३५२९४११७६४७̇; ·०̇४३४७८२६०८६९५६५२१७३९१३̇; ·०̇३४४८२७५८६२०६८९६५५१७२४१३७९३१̇; ·०̇३२२५८०६४५१६१२९̇; (११) ·६̇; ·४̇; ·१४८̇; ·०̇९८७६५४३२̇; ·०̇१२३४५६७९̇. (१२) १·४̇५̇; १४·७̇६२̇; ·००२७६̇३̇; ·०̇०८२६४४६२८०९९१७३५५३७१९̇. (१३) ·०̇५४̇; ·०̇४९५̇; २·४̇३९०२̇; ·०̇९२२५̇. (१४) ·१̇४२८५७̇; ·०̇७६९२३̇; ·०̇०३३६७̇; ·०̇०२४५७̇.

म. पृ. ७९.

(१) $\frac{१}{३}$; $\frac{५}{९९}$; $\frac{६}{११}$; $\frac{२७}{३७}$. (२) $\frac{४}{१६५}$; $\frac{८}{१८५}$; ३$\frac{३७}{५५००}$; २$\frac{१०७}{२४७५}$. (३) ३$\frac{२३}{५५}$; $\frac{१३३}{३०००}$; १$\frac{८}{५५}$; $\frac{८९}{११६००}$. (४) ४$\frac{५९}{१११०}$; $\frac{१६९९}{२२२०}$; २$\frac{१९}{५५}$; $\frac{८१}{४४०}$. (५) २$\frac{१०१}{१११०}$; $\frac{१११}{२०२}$; १$\frac{३}{७८}$. (६) २$\frac{९}{१४}$; ५$\frac{१७}{८८}$; ११$\frac{१९}{६६}$.

प. पृ. ८१.

(१) ४७·४११४̇५५२८६̇. (२) १६८·६९६८३५५८७. (३) ·२̇४̇; ·०३२̇७११६५̇. (४) ·८̇५७१४३̇; ·३८̇५̇. (५) ९·९२८; २·२̇९७̇. (६) ३१·७̇९१̇; ३५२·०८५६½. (७) ३·१̇; ·०५̇२̇ (८) ४९; १·१४̇५̇.

य. पृ. ८९.

(१) ३१·०७; २६७·९१. (२) ६४४·०७५; २·२४७. (३) २७·००२९५; १५·४५६४६. (४) ११०८·००३७. (५) १४२७·६५६८८. (६) २३५·१०१. (७) ३१·४६. (८) १००७१·१. (९) १३६३. (१०) ६·६. (११) २; ०; ०; २. (१२) ·०७; ·०१. (१३) १·९७२; ३·६७८; १·८११. (१४) ·०३; ०; ३·२७. (१५) २·३८२; ·०३३; ६·४०३. (१६) ·०१; १·३० ; ६२·९८. (१७) १३·० ; ० ; ४५·६ (१८) १·१०३८ ; १·१५९६ ; १·३४४७. (१९) १·१५८६६; ११४४·३२१५८. (२०) १·२३१२; २९०·५०२४. (२१) ७२३८·८८८८८; ·१८९६७; २१४८·५८१८३. (२२) ३·०८३ ; ५·$\frac{७}{११२}$. (२३) ·०००२९३८. (२४) पहिला महत्तम, दुसरा लघुतम. (२५) ११२०·११२०००॰९. (२६) ३८८७·८१३. (२७) चढत्या क्रमानें $\frac{३३३}{१०६}$; ३·१४१५९२६ आणि $३+\frac{१}{७+\frac{१}{१६}}$. (२८) ·३६; ·८५; १·११५; ·००९४. (२९) क ·२४९९९९; ख ·१६६६६६; ग ·००९७०५९; घ १·७१८२८१; ङ ·२०२७३२; च ३·१४१५९५.

र. पृ. १००.

(१) ५ शि. ७ पे. २ फा. (२) ५ पौं. ० शि. ३$\frac{३}{४}$ पे. (३) १४७ आ. ० दि. ४ अ. ० मि. ५४$\frac{६}{११}$ से (४) ४९·७५ चौ. फू (५) १ रू. ३९ पो. २८ चौ. या. २ चौ. फू. ३६$\frac{६३}{५०}$ चौ. इं. (६) ·०४२५७०७ इ० टन. (७) ·०४·७१९०४७६ गि. (८) ·०५६२५ कोस. (९) ·०४४९९६८७५ तोळा. (१०) ·०४७२ (११) ४·०७४ यार्ड. (१२) १२ चांद्रमास, बाकी १०·८८२९३ दिवस.

ल. पृ. १०२.

(१) २१·२५. (२) ७३८·५७१४२८. (३) ५६०८७·६. (४) २६·९६२५. (५) १०·१५४८७५ (६) ९०·५ (७) ·१०५. (८) ३२·८४. (९) १२·७९ ही सरासरी होईल ह्मणजे ·२१ सरासरी कमी होईल.

व. पृ. ११९.

(१) ६ पेन्स. (२) १५$\frac{१}{२}$ कोस. (३) ३०६ दिवस. (४) ६ पेन्स. (५) ६ दिवस. (६) १$\frac{१}{२}$ दिवस. (७) ६८ रु. ४ आ. (८) २ पौं. २ शि. (९) २५ मनुष्यें. (१०) ३०१ पौं. (११) १२ पेनिवेट. (१२) ५४ रु. १० आ. (१३) ३ आ. २$\frac{२}{५}$ पै. (१४) ७८३३ रु. ५ आ. ४ पै. (१५) ५०४० पौं. (१६) ३७८$\frac{७}{२५}$ पौं. (१७) २८६$\frac{२}{१३}$ मैल. (१८) पहिल्यांत नफा. (१९) ३$\frac{३}{५}$ तास. (२०) १९$\frac{११}{१६}$ दिवस. (२१) २$\frac{३३}{७३}$ दिवस. (२२) २$\frac{२}{३}$ मिनिटें. (२३) १० दिवस. (२४) ४ तास. (२५) १८ दिवस. (२६) $\frac{२९}{३६}$ हौद भरेल. (२७) ४ वाजून २१$\frac{९}{११}$ मिनिटांनीं; ६ वाजून ३२$\frac{८}{११}$ मिनिटांनीं; ९ वाजून ४९$\frac{१}{११}$ मिनिटांनीं. (२८) ४ वाजून ५$\frac{५}{११}$ मिनिटांनीं व ४ वाजून ३८$\frac{२}{११}$ मिनिटांनीं; ७ वाजून २१$\frac{९}{११}$ मिनिटांनीं व ७ वाजून ५४$\frac{६}{११}$ मिनिटांनीं; ११ वाजून १०$\frac{१०}{११}$ मिनिटांनीं व ११ वाजून ४३$\frac{७}{११}$ मिनिटांनीं. (२९) १ वाजून ३८$\frac{२}{११}$ मिनिटांनीं; ४ वाजून ५४$\frac{६}{११}$ मिनिटांनीं; ८ वाजून १०$\frac{१०}{११}$ मिनिटांनीं. (३०) १८०० पौं. (३१) ५ शि. ६ पे. (३२) ७ पौं. १६ शि. (३३) २६० रु. ९ आ. ७$\frac{१}{५}$ पै. (३४) ९० मैल. (३५) ६७ पौं. ६ शि. ८ पे. (३६) ७ महिने. (३७) ४८० एकर. (३८) २३० रु. ६ आ. ४$\frac{४}{५}$ पै. (३९) ११२६८ शिपाई. (४०) २० दिवस. (४१) ४९$\frac{१}{२१६}$ दि. (४२) ६ आठवडे. (४३) २ दिवस. (४४) ३$\frac{११}{१९}$ महिने.

श. पृ. १५३.

(१) १$\frac{१}{२}$; २$\frac{२}{३}$; २$\frac{२}{३}$; ६ (२) २$\frac{२}{५}$; ३$\frac{३}{४}$; ३$\frac{३}{४}$; ६$\frac{२}{३}$. (३) ३$\frac{१}{३}$; ४$\frac{४}{५}$; ४$\frac{४}{५}$; ७$\frac{१}{२}$. (४) ४$\frac{२}{७}$; ५$\frac{५}{६}$; ५$\frac{५}{६}$; ८$\frac{२}{५}$. (५) १$\frac{३}{७}$; २$\frac{४}{५}$; २$\frac{४}{५}$; १७$\frac{१}{२}$. (६) २$\frac{१}{४}$; ६$\frac{२}{५}$; ६$\frac{२}{५}$; १०. (७) १$\frac{५}{९}$; २$\frac{४}{७}$; २$\frac{४}{७}$; ३१$\frac{१}{१२}$. (८) ५; ५; ५; ९$\frac{४}{११}$.

प. पृ. १६४.

१)	१५	:	१२	::	१० आंबे	:	८ आंबे.
२)	१७ तोळे	:	६ तोळे	::	३४	:	१२.
३)	५	:	१०	::	९	:	१८.
४)	४	:	४८	::	१ पा.	:	१ मण.
५)	२०	:	३०	::	·॥·	:	·।॥·
६) अ	३	:	५	::	२१	:	३५ अथवा.
ब	५	:	३	::	३५	:	२१.
७)	क्ष	:	य	::	य	:	ज्ञ
८)	क	:	ग	::	ख	:	ख.

स. पृ. १६९.

(१) ३:५; ९:४९; ७:८; २:३; २०९:५१२; २:१; ४:३; ८:९; २०:२१. (२) २:५; ९:५०; १००:४८३. (३) इंग्रजी वाचणीप्रमाणें:— ७:९; ८:१५; ४$\frac{५}{९}$:११$\frac{३}{४}$. (४) नाहीं. (५) नाहीं. ४ थें पद $\frac{४५५}{६०८}$ घ्यावें. (६) ६; ·०१; २ ६९३३. (७) ९१:८१. (८) क:ख:ग:घ = १६:२४:३०:३५. (९) ३२३:३२४. (१०) ७२ शेर. (११) $\frac{१}{६}$. (१२) ९:८. (१३) अ ५२८८, ब २१४४, क १०९२. (१४) ५२, १३०, १०४. (१५) $\frac{५}{९}$. (१६) गंधक १०. (१७) सामानाची किंमत ८० रुपये. (१८) १ यार्ड, $\frac{२}{३}$ यार्ड व $\frac{३}{४}$ यार्ड (१९) २१६ रु, ८४ रु. (२०) ३४८ रु. ५ आ. ९$\frac{१०५}{१०७}$ पै., ४१८ रु. ० आ. ७$\frac{१९}{१०७}$ पै., २९८ रु. ९ आ. ६$\frac{९०}{१०७}$ पै. (२१) अ १४२॥ रु., ब ११२॥ रु., क ९० रु. (२२) १५ हं. ० का २० पौं. तांबें, १ हं. २ का. १९ पौं. जस्त (२३) ८८८$\frac{८}{९}$ औंस ऑक्सिजन, १११$\frac{१}{९}$ औंस हैड्रोजन. (२४) अ १६० रु., ब १७५ रु. (२५) ७०० रु. अ, ६०० रु. ब, २०० रु. क.

उ. सू. १६२.

(१) ७५ आंबे. (२) १० आणे. (३) ७५ घोडे. (४) ३५ मि. (५) ६० फू (६) १२० मजूर. (७) १० रु. (८) २ खं १४ म. (९) ७२ रु. (१०) १९$\frac{१९}{३५३}$ शि. (११) ५५ रु. (१२) ११० यार्ड. (१३) १२३ वार. (१४) रु. २४॥०।॥२$\frac{४२१}{४८७१}$. (१५) रु. २२।-।२$\frac{२२६७}{१६८०५}$. (१६) १३ प. ३$\frac{४७}{२१५}$ पा. (१७) रु. २०८८२$\frac{२५१३३}{११३४४१}$. (१८) रु. ५८८=. (१९) रु. ५॥।-८१$\frac{५९}{७३}$. (२०) १$\frac{५}{१६}$ कोस. (२१) १ अ १३ मि. ४६$\frac{२}{३}$ से. (२२) ७३ ए. १३ गुं. १$\frac{६७}{७७}$ आ. (२३) १० आ. ८$\frac{३६६}{३३३}$ पै. (२४) ९ रु. ८ आ. ११$\frac{१}{१०}$ पै. (२५) ४ पौं. १५ शि. ६$\frac{११}{४०}$ पे. (२६) १०$\frac{१}{२०}$ पै. (२७) ११ पौं. ९ शि. ४$\frac{१}{२०}$ पे. (२८) १५० मनुष्यें. (२९) १० महिने. (३०) १ वर्ष. (३१) १७१ मनुष्यें. (३२) ४ आठवडे. (३३) रु. ०॥=।॥०$\frac{३}{५}$. (३४) ६२२ बि. ४ पां. ८$\frac{६}{९}$ चौ. का (३५) ३॥। पावशेर. (३६) १०९ रु. ९ आ. ४$\frac{५}{१६}$ पै. (३७) १०७ रु. ६$\frac{६}{४७}$ पै. (३८) रु. ८≡।॥२$\frac{३०३१}{३१५९}$. (३९) ३३९ रु. २ आ. ८ पै. (४०) रु. २१८=।॥२$\frac{५३३}{६०१}$. (४१) १३ म २३$\frac{२३}{१७१}$ शे. (४२) ३ आ. ११$\frac{१०९६७}{११३०३}$ पै. (४३) ८ म. १४$\frac{४७०५}{६०७१}$ शे. (४४) बा. खं. ।२।१८=$\frac{९३१०}{४१३२९}$. (४५) ३ शेर. (४६) रु. ९६२'५००० (४७) ७९ पौं. १ शि. ७$\frac{१}{२}$ पे. (४८) ७१३४३ रु. २ आ. (४९) १४ पौं. ८ शि. ११$\frac{७}{९९}$ पे. (५०) २३ रु. १४ आ. २$\frac{२}{५}$ पै. (५१) ५६० रु. ८ आ. ५$\frac{१}{११}$ पै. (५२) १६२०'९६ फूट. (५३) ९ रु. ३ आ. १०$\frac{४७}{५२}$ पै. (५४) १४ रु. १३ आ. ४$\frac{१६०}{३४७}$ पै. (५५) १ रु. १४ आ. ३$\frac{३}{११}$ पै. (५६) ५ रु. ५ आ. ६$\frac{२}{३}$ पै. (५७) ५ आ. २$\frac{३२}{४३}$ पै. (५८) १८ शि. २$\frac{५५}{६४}$ पे. (५९) १७४ रु. १३ आ. ८$\frac{४}{७}$ पै. (६०) १०४५ रु. ५ आ. ४ पै. (६१) १४० रु. (६२) ८४$\frac{३८७}{४२१}$ दि. (६३) ७६२२ चिरे. (६४) ९४$\frac{६}{११}$ हात. (६५) ३२ फू. १ इं.

१५२ फू. ४$\frac{3}{4}$ इं. (६६) २$\frac{1}{4}$ ता. (६७) १२८० मनुष्यें. (६८) ७० दि. (६९) २८६ मे. १ फ. ९$\frac{3}{13}$ पौ. (७०) ७९५ रु. (७१) १ आ. ११$\frac{43}{67}$ पै. (७२) २९ रु १ आ. ७$\frac{157}{335}$ पै. (७३) ६ आ ३$\frac{1}{365}$ पै; ४५७ रु. ४ पै तोटा. (७४) रु. १०११-॥२. (७५) १३६८ रु. २ आ. (७६) ५४७५६ डुकेत. (७७) १०६ पौं. ११ शि. ६ पे. (७८) ७४$\frac{11}{12}$ दि. (७९) ५३८९ सिक्किन. (८०) ४ पौं. ४ शि. (८१) १ पौं. १५$\frac{1}{2}$ औं. (८२) २५७ पौं. १० शि. (८३) १४०० पौं.; ३$\frac{3}{14}$ पे. (८४) १० वाजून २५ मि. ३४$\frac{1}{6}$ से. (८५) १ पौं. ११ शि. १०$\frac{1}{2}$ पे. (८६) ३ पौं. ७ शि. १० पे. (८७) १ ता. १० मि. १३$\frac{47}{68}$ से. (८८) २४०० लोक. (८९) २ शि. ८$\frac{3}{4}$ पे.; ६१ पौं. १८ शि. $\frac{1}{4}$ पे. (९०) २८८ तोफा. (९१) १ पौं. १५ शि. ९ पे. (९२) २८ बायका. (९३) ९७५०००० पौं. (९४) २५$\frac{2}{3}$ दि. (९५) २ हं. ३ का. २० पौं. ५$\frac{61}{63}$ औं. (९६) रु. १०२॥-=२$\frac{10}{13}$. (९७) गुरुवार. दुपारानंतर आठ. (९८) १७ का. ३$\frac{1}{2}$ पेक. (९९) १५ खें-चरें. (१००) मंदाचा ५$\frac{5}{11}$ मि. पुढें अगर जलदाचा ५$\frac{5}{11}$ मि. मार्गे सारावा. (१०१) १०४ दि. (१०२) ११ दि.; १२$\frac{6}{7}$ दि. (१०३) २२६८०० वर्खं. (१०४) १$\frac{1}{4}$ मै. (१०५) ३ ता. २५ मि. मध्यान्हानंतर.

ळ. पृ. १७६.

(१) १ रु. ६ आ. ८ पै; २ रु. ६ आ.; २ रु. १४ आ. ६ पै. (२) ३ आ. ६ पै.; ८$\frac{1}{42}$ आ.; ३१ रु. ११ आ. ६ पै. (३) २ आ. ९ पै.; ३ रु. ६ आ.; २१ रु. (४) २ आ.; १ आ. ४ पै; १ रु. ६ आ. ६ पै. (५) ५ आ. ४ पै.; १ रु.; ७ रु. ७ आ. ५ पै १॥ दा. (६) ४ रु. ११ आ.; ३३ रु. १२ आ.; ३३ रु. १२ आ. (७) १ रु. १४ आ.; ९$\frac{1}{2}$ पै बारुळे मापें, ६$\frac{6}{11}$ पै सो. मापें.; २ रु. ८ आ. ६ पै बा. मापें; २ रु. ७ आ. ४$\frac{1}{2}$ पै सो. मापें. (८) ६ पै बा. मापें, ४$\frac{1}{2}$ पै सो. मापें; ४ रु. ६ आ.; ८ आ. (९) ४ आ; १६ रु. १४

आ.; ४ रु. ३ आ. ६ पै (१०) ११२ रु. ८ आ. बा. मापें, १५० रु. सो. मापें; ६० रु. बा. मापें, ८० रु. सो. मापें; १ आ. ३ पै बा. मापें, ११$\frac{१}{४}$ पै सो. मापें. (११) १ आ. ६ पै; २ आ., ६ आ. ८ पै; १५ रु. १५ आ., ८ रु. ७ आ. (१२) १० आ. २ रेंस; १ रु. १२ आ. ६$\frac{१८}{२५}$ पै; ९ आ. ७$\frac{१}{५}$ पै; १ रु. ५ आ. $\frac{१८}{२५}$ पै.

क्ष. पृ. १८४.

(१) १ व. ४ म. (२) ३२ मनुष्यें. (३) ३६० मनुष्यें. (४) ४० घोडे. (५) २० घोडे. (६) ६ महिने. (७) ८० मजूर. (८) २० दि. (९) ३$\frac{१}{२}$ दि. (१०) ९ खं. ४ म. (११) १२५ रिमें. (१२) ३ मनुष्यें. (१३) २४४८ रु. (१४) ९९$\frac{३}{८}$ दि. (१५) ११४ पौं. ६ शि. (१६) ६४ मनुष्यें. (१७) ११ ट. ६ हं. ८ औं. (१८) २० तट्टे. (१९) १० ता. (२०) १४४ फू. (२१) ११६ मनुष्यें. (२२) ११२० रु. (२३) १० जोड्या. (२४) ११। रु. (२५) ३६ दि. (२६) २६$\frac{४}{११}$ को. (२७) ३६ दि. १० अ. (२८) १७ खं. १५ म. ६$\frac{२}{३}$ पा. (२९) ३० मनुष्यें. (३०) १०४$\frac{७१}{१२०}$ दि. (३१) ३५१० पौं. (३२) ८२$\frac{१}{३२}$ दि.

ज्ञ. पृ. १९७.

(१) २१३, ३५५, ४९७; ५२५, ३१५, २२५. (२) अ रु. २०४८=८$\frac{२४}{३७}$; ब रु. २८=॥=॥।१$\frac{३}{३७}$; क रु. ३०६८≈।१$\frac{५}{३७}$. (३) ४६६॥=॥२, ३५०, २८०, २३३।-।१, २००. (४) ४·१७ तोळे. (५) तांबें. खं. २॥२।८६$\frac{१८}{३७}$ टां.; कथील म. ८५॥९॥।११$\frac{१९}{३७}$ टां. (६) १०॥$\frac{११}{८०}$ मासे रुपें. (७) अ रु. १९७८॥।२$\frac{५}{१७}$; ब रु. १३७॥।≈८$\frac{१२}{१७}$. (८) ७९$\frac{१}{३}$ कसाचें. (९) १४०, २८०, ४२०, ५६०. (१०) अ रु. ७६।≈॥$\frac{६}{१७}$; ब रु. ७०॥-।१$\frac{१६}{१७}$; क रु. ५२॥।≈८$\frac{१२}{१७}$. (११) सोरा ३०$\frac{२}{५}$ शेर; गंधक ३$\frac{४}{५}$ शेर; कोळसा ५$\frac{४}{५}$ शेर.

(१२) अ रु. ६८॥। $\frac{४८}{६१}$ पै; ब रु. ४७॥=॥।२$\frac{१३}{६१}$. (१३) ३॥। शेर. (१४) अ रु. १०३८= ; ब रु. १२८॥।=॥ ; क रु. ४२॥।=॥· (१५) आक्सि. ८८९ औंस, हैड्रो. १११ औंस. (१६) अ रु. ६६६॥=॥२ ; ब रु. ३३३।–।१ क रु. २०००. (१७) ८५ कसाचें. (१८) १०० कस; २$\frac{३}{४}$$\frac{३}{१६}$ तोळे. (१९) अ रु. ११=॥।२$\frac{१}{२५}$; ब रु. ३।=८१$\frac{११}{२५}$; क रु. १॥·॥।२$\frac{१३}{२५}$· (२०) अ १०० रुपयांचा ; ब ३०० रुपयांचा. (२१) पौं १२१–५–६ ; पौं. १७९–११–० ; पौं. २९२–१२. (२२) ही जिनगी १ असून या जिनगीच्या वांटून द्यावयाच्या भागांची बेरीज १ पेक्षां जास्त होते, ह्मणून ही इच्छा असंभाव्य आहे. (२३) बिनकसर वांटणी होणें अशक्य आहे. (२४) क ५ शि., ख ६ शि. ८ पे., ग ८ शि. ४ पे. ; क ५ शि ४ पे., ख ६ शि. ८ पे., ग ८ शि. (२५) ति. ते. १६$\frac{५}{७७}$ शेर ; क. ते. २५$\frac{१}{१४}$ शेर. (२६) प ३५०० पौं., फ ४९०० पौं., ब ७००० पौं., भ ८४०० पौं. (२७) ब ३७५ रु., फ २७० रु., र १०५ रु. (२८) क २०७ पौं. ५ शि. ६$\frac{१४}{७३}$ पे. ; ख २२९ पौं. ३ शि. ११$\frac{५९}{७३}$ पे (२९) क्रौ. १००; शि. १७५; पे. २५०. (३०) अ ८ पौं. ११ शि. ६ पे. ; ब १३ पौं. ९ शि. ६ पे. (३१) ११२॥ रु. (३२) २ हं. १ का. २१ पौं. ; २० हं. ३ का. १६ पौंड. (३३) $\frac{४१४}{१५७३}$, $\frac{३६}{१४३}$, $\frac{६९}{२८६}$ (३४) ४ ग्या. १ का. १$\frac{४}{१३}$ पिं.; ६ ग्या. ३ का. $\frac{१२}{१३}$ पिं ; ८ ग्या. १$\frac{५}{१३}$ पिं.; १३ ग्या. १ का. १$\frac{२३}{२६}$ पिं. (३५) चहा २ शि. ८ पे.; काफी १ शि. ७$\frac{१}{४}$ पे.; साखर ५$\frac{१}{४}$ पे. (३६) ३०९४४० , ३१३३०८ , ३७७१३०. (३७) ५६, ५०, ३२, १६, ४६.

का. पृ. २१०.

(१) १२५ रु. (२) ३६ रु. ९ आ. ७$\frac{१}{५}$ पै. (३) ४५ पौं. (४) रु. १२७१०=०२$\frac{२}{५}$. (५) रु. ८८७०–. (६) २८५७ पौं. १० शि. (७) ७४४ रु. १२ आ. १०$\frac{१}{२}$ पै. (८)

आ.; ४ रु. ३ आ. ६ पै (१०) ११२ रु. ८ आ. बा. मापें, १५० रु. सो. मापें; ६० रु. बा. मापें, ८० रु. सो. मापें; १ आ. ३ पै बा. मापें, ११$\frac{१}{४}$ पै सो. मापें. (११) १ आ. ६ पै; २ आ., ६ आ. ८ पै; २५ रु. १५ आ., ८ रु. ७ आ. (१२) १० आ. २ रेंस; १ रु. १२ आ. ६$\frac{१८}{२५}$ पै; ९ आ. ७$\frac{१}{५}$ पै; १ रु. ५ आ. $\frac{१८}{२५}$ पै.

क्ष. पृ. १८४.

(१) १ व. ४ म. (२) ३२ मनुष्यें. (३) ३६० मनुष्यें. (४) ४० घोडे. (५) २० घोडे. (६) ६ महिने. (७) ८० मजूर. (८) २० दि. (९) ३$\frac{१}{२}$ दि. (१०) ९ खं. ४ म. (११) १२५ रिमें. (१२) ३ मनुष्यें. (१३) २४४८ रु. (१४) ९९$\frac{३}{८}$ दि. (१५) ११४ पौं. ६ शि. (१६) ६४ मनुष्यें. (१७) ११ ट. ६ हं. ८ औं. (१८) २० तट्टे. (१९) १० ता. (२०) १४४ फू. (२१) १९६ मनुष्यें. (२२) १९२० रु. (२३) १० जोड्या. (२४) १११ रु. (२५) ३६ दि. (२६) २६$\frac{४}{११}$ को. (२७) ३६ दि. १० अ. (२८) १७ खं. १५ म. ६$\frac{२}{३}$ पा. (२९) ३० मनुष्यें. (३०) १०४$\frac{७१}{१२०}$ दि. (३१) ३५१० पौं. (३२) ८२$\frac{१}{३२}$ दि.

ज्ञ. पृ. १९७.

(१) २१३, ३५१, ४९७; ५२५, ३१५, २२५. (२) अ रु. २०४८=८$\frac{२४}{३९}$; ब रु. २८=॥=।॥१$\frac{२}{३९}$; क रु. १०६८≈।१$\frac{५}{३९}$. (३) ४६६॥=॥२, ३५०, २८०, २३३।-।१, २००. (४) ४·१७ तोळे. (५) तांबें. खं. २॥२।८६$\frac{१८}{३७}$ टां.; कथील म. ८५॥९॥।११$\frac{१९}{३७}$ टां. (६) १०॥$\frac{११}{८०}$ मासे रुपें. (७) अ रु. १९७८॥।२$\frac{५}{१७}$; ब रु. १३७॥।≈८$\frac{१२}{१७}$. (८) ७९$\frac{१}{३}$ कसाचें. (९) १४०, २८०, ४२०, ५६०. (१०) अ रु. ७६।≈॥$\frac{६}{१७}$; ब रु. ७०॥-।१$\frac{१६}{१७}$; क रु. ५२॥।≈८$\frac{१२}{१७}$. (११) सोरा ३०$\frac{२}{५}$ शेर; गंधक ३$\frac{४}{५}$ शेर; कोळसा ५$\frac{४}{५}$ शेर.

(१२) अ रु. ६८।।। $\frac{४८}{६१}$ पै; ब रु. ४७॥=॥।२$\frac{१३}{६१}$ (१३) ३॥। शेर. (१४) अ रु. १०३८= ; ब रु. १२८॥।=॥; क रु. ४२॥।=॥. (१५) आक्सि. ८८९ औंस, हैड्रो. १११ औंस. (१६) अ रु. ६६६॥=॥२; ब रु. ३३३।-१ क रु. २०००. (१७) ८५ कसाचें. (१८) १०० कस; २$\frac{३}{४}\frac{२}{६}$ तोळे. (१९) अ रु. १।=॥।२$\frac{१}{२५}$; ब रु. ३।=८१$\frac{११}{२५}$; क रु. १॥-॥।२$\frac{१३}{२५}$. (२०) अ १०० रुपयांचा; ब ३०० रुपयांचा. (२१) पौं १२१-५-६; पौं. १७९-११-०; पौं. २९२-१२. (२२) ही जिनगी १ असून या जिनगीच्या वांटून द्यावयाच्या भागांची बेरीज १ पेक्षां जास्त होते, ह्मणून ही इच्छा असंभाव्य आहे. (२३) बिनकसर वांटणी होणें अशक्य आहे. (२४) क ५ शि., ख ६ शि. ८ पे., ग ८ शि. ४ पे.; क ५ शि ४ पे., ख ६ शि. ८ पे., ग ८ शि. (२५) ति. ते. १६$\frac{५}{७}$ शेर; क. ते. २५$\frac{१}{१४}$ शेर. (२६) प ३५०० पौं., फ ४९०० पौं., ब ७००० पौं., भ ८४०० पौं. (२७) ब ३७५ रु., फ २७० रु., र १०५ रु. (२८) क २०७ पौं. ५ शि. ६$\frac{१४}{७३}$ पे.; ख २२९ पौं. ३ शि. ११$\frac{५९}{७३}$ पे (२९) क्रौ. १००; शि. १७५; पे. २५०. (३०) अ ८ पौं. ११ शि. ६ पे.; ब १३ पौं. ९ शि. ६ पे. (३१) ११२॥ रु. (३२) २ हं. १ का. २१ पौं.; २० हं. ३ का. १६ पौंड. (३३) $\frac{४१४}{१५७३}$, $\frac{३६}{१४३}$, $\frac{६९}{२८६}$ (३४) ४ ग्या. १ का. १$\frac{४}{१३}$ पिं.; ६ ग्या. ३ का. $\frac{१२}{१३}$ पिं; ८ ग्या. १$\frac{५}{१३}$ पिं.; १२ ग्या. १ का. १$\frac{२३}{२६}$ पिं. (३५) चहा २ शि. ८ पे.; काफी १ शि. ७$\frac{१}{४}$ पे.; साखर ५$\frac{१}{४}$ पे. (३६) ३०९४४०, ३१३३०८, ३७७१३०. (३७) ५६, ५०, ३२, १६, ४६.

का. पृ. २१०.

(१) १२५ रु. (२) ३६ रु. ९ आ. ७$\frac{१}{५}$ पै. (३) ४५ पौं. (४) रु. १७७१८=८२$\frac{३}{५}$. (५) रु. ८८७८-. (६) २८५७ पौं. १० शि. (७) ७४४ रु. १२ आ. १०$\frac{१}{२}$ पै. (८)

९८ रु. ७ आ. $५\frac{१}{२५}$ पै. (९) ३७ पौं. १७ शि. $३\frac{१}{१०}$ पे. (१०) रु. २०॥· (११) रु. $५४३८-।\frac{५७}{७३}$· (१२) रु. $७६११॥≈॥२\frac{४}{७३}$· (१३) १२३४ रु. ३ आ. $\frac{५४६}{१८२५}$ पै. (१४) ४७० रु. १२ आ. $११\frac{३५२१}{१४६००}$ पै. (१५) ९८ रु. ० आ. $९\frac{१२८४९}{१४६००}$ पै. (१६) २३ पौं. ७ शि. $१\frac{१}{२}$ पे. (१७) रु. $१३२४॥-॥१\frac{४}{५}$· (१८) १३५६ पौं. १० शि. $६\frac{१३७१}{१६००}$ पे. (१९) २२ रु. ० आ. $५\frac{६१}{१००}$ पै. (२०) ७३३ रु. ५ आ. $७\frac{१७}{२५}$ पै. (२१) ३६ पौं. १६ शि. $७\frac{५१९}{१०००}$ पे. (२२) ४ पौं. १२ शि. $६\frac{१३}{६४०}$ पे. (२३) ६५ पौं. १ शि. $६\frac{३}{४}$ पे. (२४) ८१५ रु. २ आ. $१\frac{२०७}{४००}$ पै. (२५) ७३७ रु. ८ आ. $११\frac{२०३}{३२५}$ पै. (२६) ३४ रु. १ आ. $७\frac{९}{१३}$ पै. (२७) ३२ पौं. १५ शि. $११\frac{११२१}{१२४८}$ पे. (२८) रु. $१५६॥-।२\frac{४१३}{४१६}$· (२९) ३० पौं. ९ शि. $२\frac{१३८७}{२९२००}$ पे. (३०) ३९ रु. २ आ. $१\frac{११६६}{१८२५}$ पै. (३१) ७ पौं. १० शि. $४\frac{१०३५१}{१४६००}$ पे. (३२) १०८ रु. १४ आ. $५\frac{२२}{२५}$ पै. (३३) ७ पौं. १५ शि. $३\frac{१८९१८९}{२९२०००}$ पे. (३४) ९ रु. १२ आ. $१०\frac{६९२०३१}{१४४०००}$ पै. (३५) ११४ पौं. १० शि. $६\frac{३१९६९}{३६५००}$ पे.

खा. पृ. २१६.

(१) रु. $५।=॥२\frac{८०}{१२३}$· (२) ४२ रु. ४ आ. $\frac{४८}{७१}$ पै. (३) ३ म. $२६\frac{१४८}{२४७}$ दि. (४) रु. ५।॥≈ (५) २४ व. २ म. $२४\frac{२०६५२}{४३९७७}$ दि. (६) १०५० रु. (७) २ रु. ३ आ. $११\frac{८६३}{४१२७}$ पै. (८) १०४४ रु. ४ आ. $६\frac{६}{७}$ पै. (९) ९ रु. १ आ. $१\frac{७३}{१४७}$ पै. (१०) ३ व. ८ म. $३\frac{११४२१}{२८०७३}$ दि. (११) ५० रु. ४ आ. $३\frac{७१७}{११५३}$ पै. (१२) $२०\frac{८२०}{४१४०११}$ व. (१३) ६४८ पौं. १० शि. $२\frac{२६}{४७}$ पे (१४) रु. $२२१०॥≈॥\frac{६}{११}$· (१५) ५९१५ रु. ६ आ. $९\frac{६९९}{११४१}$ पै. (१६) ४६० पौं. १६ शि. (१७) ४१९ रु. १५ आ. $३\frac{११}{११}$ पै. (१८) ४९०३ रु. ५ आ. ४ पै. (१९) १२१६३ रु. २ आ. $६\frac{६}{११}$ पै. (२०) ६७८१ रु. ८ आ. $८\frac{८}{१०७}$ पै. (२१) ८४८९ रु. ४ आ.

८$\frac{१०४}{५०९}$ पे. (२२) ३३९ पौं. १३ शि. ८$\frac{१२४}{१४९}$ पे. (२३) ५६९ रु. १४ आ. १$\frac{७३०९}{९३२३}$ पै. (२४) ४ पौंड. (२५) ३ रु. ४ आ. (२६) ३ रु. ५ आ. ३$\frac{१६२४४१}{१६३०८१}$ पै. (२७) रु. ३॥≈!।।२$\frac{२५५७७}{३८२१७}$. (२८) ६ रु. (२९) ५$\frac{१}{४}$. (३०) ४ पौं. १०$\frac{१०}{४४६१}$ शि. (३१) ३ व. (३२) ३ व. ७ म. (३३) ५ व. ७ म. २२$\frac{४९७६}{९०८७}$ दि. (३४) ६ व. ९ म. २४$\frac{६}{११}$ दि. (३५) ता. ५ जानेवारी सन १८७१. (३६) २५ व. (३७) २९१ पौं. १७ शि. ०$\frac{११८}{५०३}$ पे. (३८) २$\frac{१}{२}$ रु. (३९) ५६२ रु. ८ आ.; १०२८५ रु. ११ आ. ५$\frac{१}{७}$ पै. (४०) २१७ रु. १५ आ. ६ पै.; व्याजाचा दर $\frac{१}{२}$ रु. (४१) १० पौं. १५ शि. ३$\frac{९}{५०}$ पे.; २ पौं. ५ शि. ९ पे.; २ पौं. ५ शि. ७$\frac{१}{२}$ पे. (४२) ३१५ पौं. १० शि. ७$\frac{२६}{२७}$ पे.; १२$\frac{१४३१३१६}{२८६२५१७}$ व. (४३) ३ रु. ० आ. १०$\frac{२}{३}$ पै. (४४) ४१६ रु. १० आ. ८ पै. (४५) २ व. १ म. २२$\frac{४}{११}$ दि.

प्रश्नसमुदाय. पृ. २१९.

(१) ५ तास. (२) $\frac{२०६}{११५५}$; १$\frac{२९}{४२}$; १ शि. १$\frac{१}{२}$ पे.; ३$\frac{५}{८४}$. (३) १८० गोट्या. (४) ४$\frac{१}{२}$ व. (५) ७३६ झाडें. (६) २०० खं. (७) १ मण. (८) २ बि. ५ पां १२$\frac{२९}{८०}$ चौ. का. (९) एकंदर इस्टेट २७० रु.; अनुक्रमें ९० रु.; ६७$\frac{१}{२}$ रु., ५४ रु., ४५ रु. (१०) १२·३४९ इ०. (११) २० अंश. (१२) ३॥। मण. (१३) ८≈॥$\frac{२}{३}$; $\frac{४१}{४८}$; $\frac{३}{१७६}$. (१४) ४. (१५) ५$\frac{१५}{२३}$ दि. (१६) घोडा, २३२ रु. १२ आ. १$\frac{१९}{२९}$ पै.; गाडी, १८६ रु. ३ आ. ३$\frac{२१}{२९}$ पै.; सामान, ३१ रु. ० आ. ६$\frac{१८}{२९}$ पै. (१७) $\frac{३२}{७६७}$; १६२$\frac{२९}{१४०}$; १$\frac{१२१}{१७५}$; $\frac{११}{९२}$; २३०८. (१८) अ ११$\frac{१}{४}$ रु; ब २० रु.; क २९$\frac{१}{४}$ रु. (१९) अ १ शि. १०$\frac{१}{२}$ पे.; ब १ शि. १$\frac{१}{२}$ पे.; क ४$\frac{१}{२}$ पे. (२०) रु. २३।≈, १५॥=, ११॥≈॥, ९।=. (२१) ८८४; १५३. (२२) २ म. १२ दि. (२३) ३ ता. २० मि. (२४) $\frac{१६}{२५}$. (२५) ४९ रु. ११ आ. २$\frac{६}{७}$ पै. (२६)

९ दि. (२७) ३२ बैल, ४८ गाई. (२८) ·६५९३७५; $\frac{४३}{९१२०}$; ·००२५६२५६ ; २५६२५६० ; ·०२५६२५६. (२९) ५९ क. ८ $\frac{१४७०८}{४३८२१}$ वि. (३०) पुरुषास, १० आ. ६ $\frac{५४}{९१}$ पै.; बायकोस, ५ आ. ३ $\frac{२७}{९१}$ पै. ; मुलास, २ आ. ७ $\frac{५९}{९१}$ पै. (३१) $\frac{४}{२७}$. (३२) १३३ रु. (३३) २२० रु. २ आ. ३ पै. (३४) १ रु. १४ आ. (३५) क ३२०० रु., ख ४८०० रु., ग ६००० रु., घ ७००० रु. (३६) १८ खं. ६ म ८ $\frac{११}{१८}$ शे. (३७) ४४ $\frac{३९२०८६}{३१३१०३}$ हिस्से. (३८) ८ $\frac{४}{७}$ ता. (३९) रु. ११५।–. (४०) १० $\frac{१२२२०}{२१४०९}$ ता. (४१) अ १५ आ.; ब २ रु. १३ आ. (४२) $\frac{२४}{४१}$ दि. (४३) मुद्दल २१॥=॥२; नफा ४।–।१ रु. (४४) ४ वाजतां ; ४ वा. ४३ $\frac{७}{११}$ मि. (४५) १७ म. २ $\frac{१}{४}$ पा. (४६) २१ पौं. ४२ क्रौ. ६३ शि. ८४ पे. (४७) ६·९१ यो. (४८) १२ पौं. १० शि. $\frac{४}{५}$ पे. (४९) $\frac{१}{५१२}$ तसू. (५०) रु. ४।·।।।२ $\frac{२६५७}{५७००}$. (५१) ७२. (५२) ५ खं. ७ $\frac{१}{२}$ मण. (५३) १९५ कोस. (५४) रु. १०॥=॥२. (५५) $\frac{७}{३१२}$. (५६) चार द. १५० रु.; सहा द. २०० रु. (५७) ८४ मै ; १० $\frac{१}{२}$ मै. (५८) रु. ४०३३।–८१ $\frac{२३}{४०}$; ८०६६॥=। $\frac{३}{२०}$; १२०९९।।।=।१ $\frac{२९}{४०}$; १६१३३।·।। $\frac{३}{१०}$. (५९) ७७ $\frac{१}{७}$ मैल. (६०) १०५ दि. (६१) पु. ·।।।–।।।२; बा. ·॥–। $\frac{१}{३}$; मु. ·।·॥१ $\frac{२}{३}$. (६२) २३२ रु. १ आ. १ $\frac{५}{७}$ पै. (६३) १ मैल. (६४) ५०९ $\frac{१}{११}$ फेरे. (६५) १॥ घ.; ४०६ $\frac{१}{८}$ घा., १८० $\frac{१}{२}$ घा. (६६) $\frac{७१९}{५७१२}$; रु. ·।=।।। $\frac{३}{५}$. (६७) १४ अर्ध गिनी द्याव्या, २८ क्रौन द्यावे. (६८) १० वा. २२ $\frac{१}{२}$ मि. (६९) १९ $\frac{११५४९}{१२२८५}$. (७०) ३८५ $\frac{७}{२०}$ फू. (७१) रु. ३०॥=८१ $\frac{१३}{४०}$; रु. ·।।।·।२ $\frac{१}{७}$. (७२) ६९२ रु. ७ आ. $\frac{७६}{२३१}$ पै. (७३) १४ $\frac{२२}{३७}$ हात. (७४) रु. ३।।।–।१ $\frac{७}{२४}$. (७५) २३ $\frac{२९२}{६९९}$ अं. (७६) ११ वा. ५८ मि. ३२ $\frac{१}{२}$ से. (७७) दर तासास ३० मैल. (७८) २ $\frac{५९०३}{७९०४}$ दि. (७९) १ $\frac{१७}{१०६}$ दि. (८०) दुसऱ्या दिवशीं दोनप्रहरानंतर ५ वा. ३४ मि. ५ $\frac{५५}{५७}$ से. (८१) १३५०३ $\frac{२९}{३२}$ चौ. ग. (८२) अ, ४ $\frac{१}{३०}$ पै; ब, १ आ. ८ $\frac{१}{६}$ पै. (८३) अ ७३८।।।–।।। $\frac{१३११}{१५४९}$ रु. ; ब ९९६८=८२ $\frac{२३८}{१५४९}$ रु.

(८४) अ ४८।·॥ रु.; ब २२॥·॥ रु. (८५) $८\frac{८}{१३}$ दि. (८६) पुरुष, ६ रु. ; बायको, ४ रु. (८७) अ ६०० रु. ; ब ४०० रु.; क ३०० रु. ; ड २४० रु. (८८) ६० हात. (८९) अ २६४ रु. ; ब, १९८ रु. ; क ३०८ रु. (९०) ३ पौं. १५ शि. $२\frac{७}{८}$ पे. (९१) १५ रु. (९२) १ मनुष्य. (९३) १२० रु. (९४) १५० झाडें. (९५) ३० रु. ६ आ. $\frac{२१६}{२१७}$ पै. (९६) $४४९\frac{१}{२}$ रु. (९७) १२ म. ३० दि. (९८) ३० फळें. (९९) ८ पौं. १८ शि. $६\frac{६}{४३}$ पे. (१००) १ पौं. (१०१) ७२ मैल. (१०२) ४९५७ पौं. ६ शि. ८ पे. (१०३) शिलिंग $३\frac{१}{२}$, ७, $१०\frac{१}{२}$, १४, $१७\frac{१}{२}$, २१ (१०४) ६०० झाडें. (१०५) १२८०० रु. (१०६) $\frac{२७}{७१}$; $\frac{८१}{५१२०}$; $८\frac{७३}{२००}$; $\frac{५२०}{१३०९}$. (१०७) $१३०\frac{४}{७}$ कोस. (१०८) रु. १७५७॥।- (१०९) $२८००७\frac{९७}{१२५}$. (११०) १०५ रु. ४ आ. $५\frac{१५७}{२४७}$ पै. (१११) १२ वा. २० मि. (११२) २४००, १८००, १६००, १५०० स्वार.

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ.	ओळ.	अशुद्ध.	शुद्ध.
३	२	नंबरचा.	(नंबरचा)
४	२४	८	८ वा
१८	४	$\frac{२५९१}{४१८१}$	$\frac{२५९९}{४१८१}$
	५	$\frac{२३}{२७}$	$\frac{२३}{३७}$
५९	२५	२४६८×१००	२·४६८×१००
६२	१२	४३७५	४·३७५
६३	१९	३३७२०४	३३·७२०४
६४	१०	२९९४३८७	२·९९४३८७
६५	२	२५	२·५
६६	१४	०२७	·०२७
	१६	१०१	१·०१
	१७	१६	१·६
	२४	७४	७·४
६७	७	२३	२·३
६९	३०	७६८	७·६८
७०	२२	२२४	२·२४
७२	२७	·४६८$\frac{३}{४}$	·०४६८$\frac{३}{४}$
७३	२०	५×२^{२}	$५^{५} \times २^{२}$
८९	२	म.	य.
९७	२१	३·९६८७६	३·९६८७५
१२४	१७	परिणाम	परिमाण
१२८	१५	३६ हा	९ हा : ३६ हा
१४७	१५	पदार्थांचा	पदार्थांच्या
	२७	तितक्याचा	तितक्यावा
१५२	८	१६। रु. सुमारें हें उत्तर.	१६। रु. हें उत्तर

पृष्ठ.	ओळ.	अशुद्ध.	शुद्ध.
१५३	३	दि. हें. उत्तर.	४४ दि. हें उत्तर
१५४	८	३१३०	३२५०
१५५	१६	२ चिघे	३ चिघे.
	२५	१३	१६
१५७	१०	३०	२०
१७३	२७	भागाच्या	भागांच्या
१८२	१६	२ हिस्सा	२ रा हिस्सा
१९२	२०	१००×९	१०००×९
१९४	१६	·०३३; ·०३९; ·०२०८	·०३३ : ·०३९ : ·०२०८
२१९	२३	मुद्दल	मुदत
२२६	२३	दरमहा	दरसाल
२२६	१४	१२७३० ÷ ३	१२७२० ÷ ३
	१६	मागील	हल्लींचें.
२३८	१७	१० पे	१०॥ पे.